<u>רציפות של פונקציה</u>

<u>הגדרה</u>

תהיי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה $x=x_0$. נאמר כי $f\left(x\right)$ רציפה בנקודה $x=x_0$ אם מתמלאים שני התנאים:

א. קיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$.

ב. $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$.

נאמר שפונקציה $f\left(x\right)$ רציפה בקטע I אם היא רציפה בכל נקודה בקטע.

<u>דוגמה</u>

הפונקציה $f(x)=x^2$ רציפה ב $\mathbb{R}$.

<u>הוכחה בעזרת הגדרת הגבול</u>

<u>הערה</u>

כל הפונקציות האלמנטריות רציפות בתחום הגדרתן.

<u>משפט ערך הביניים</u>

תהא f רציפה ב $\left[a,b\right]$, ונניח ש $f\left(a\right)<0,\ f\left(b\right)>0$ (או להפך) אז קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $f\left(c\right)=0$.

<u>דוגמה</u>

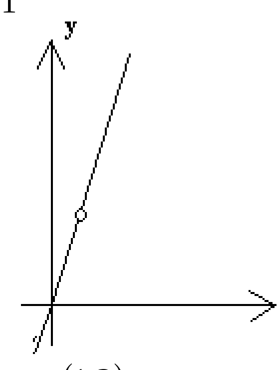
נמצא קירוב ל $\sqrt{2}$ בעזרת משפט ערך הביניים.

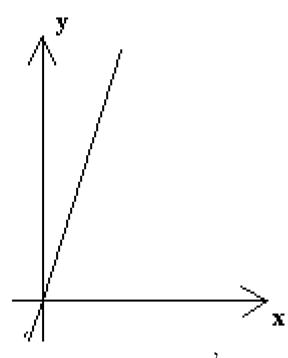
<u>מיון נקודות אי רציפות</u>

<u>נקודת אי רציפות סליקה</u>

לפני שנגדיר נקודת אי רציפות סליקה נתחיל בדוגמא.

נתבונן בגרף של הפונקציה $f\left(x\right)=2x$ ובגרף של הפונקציה $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-2x}{x-1}$.





נשים לב שהפונקציות זהות לחלוטין למעט נקודה אחת $\left(1,2\right)$.

אם נוסיף את הנקודה $\left(1,2\right)$ לגרף השמאלי נקבל פונקציה רציפה שהיא הגרף הימני.

נקודה $\left(1,2\right)$ ממחישה את ההגדרה של נקודת אי רציפות סליקה. כעת נעבור להגדרה הפורמאלית.

<u>הגדרה</u>

אם הגבולות החד צדדיים ב x_0 (במובן הצר) קיימים ושווים אבל הגבול שונה מ $f\left(x_0\right)$ או ש $f\left(x\right)$ כלל אינה מוגדרת בנקודה x_0 , אז לפונקציה יש ב x_0 נקודת אי רציפות סליקה.

<u>דוגמאות</u>

1. בדוגמא הקודמת הפונקציה $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-2x}{x-1}$ לא מוגדרת בנקודה $x_0=1$ ומתקיים $\lim\limits_{x\to1^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^+} f\left(x\right)$ ולכן לפונקציה יש נקודת אי רציפות סליקה ב $x_0=1$.

2. נתבונן בפונקציה $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-10}{x-2} & x\neq 2\\ 3 & x=2\end{cases}$. במקרה זה $\lim\limits_{x\to2^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to2^+} f\left(x\right)=7\neq f\left(2\right)$ אומנם הפונקציה מוגדרת ב $x_0=2$ אבל היא עדיין אי רציפה בנקודה זו.

<u>אי רציפות ממין ראשון - קפיצתית</u>

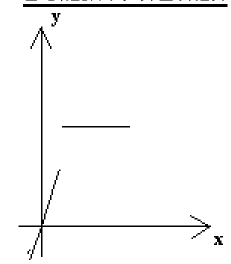
<u>הגדרה</u>

אם הגבולות החד צדדיים ב x_0 קיימים ושונים (במובן הצר) נאמר שהפונקציה אי רציפה מסוג ראשון.

<u>דוגמא 1</u>

נתבונן בפונקציה $f\left(x\right)=\begin{cases}6 & x>2\\ 2x & x\leq 2\end{cases}$. במקרה זה מתקיים $\lim\limits_{x\to2^-} f\left(x\right)\neq\lim\limits_{x\to2^+} f\left(x\right)$.

<u>המחשה לדוגמא 1</u>



<u>דוגמא 2</u>

$f\left(x\right)=\dfrac{\left|\sin x\right|}{x}+3$ מכיוון ש $\lim\limits_{x\to0^-} f\left(x\right)=2,\lim\limits_{x\to0^+} f\left(x\right)=4$ נקבל שהפונקציה אי רציפה מסוג ראשון בנקודה $x_0=0$.

<u>אי רציפות מסוג שני - עיקרית</u>

נקודה x_0 נקראת נקודת אי רציפות מסוג שני של הפונקציה $f\left(x\right)$ אם:

א. $f\left(x\right)$ מוגדרת בסביבת הנקודה x_0 , פרט אולי ל x_0 עצמה.

ב. לפחות אחד מן הגבולות החד צדדיים בנקודה x_0 אינו קיים.

<u>דוגמא 1</u>

הפונקציה $f\left(x\right)=\sin\dfrac{1}{x-1}$ אי רציפה מסוג שני בנקודה $x_0=1$ מכיוון ש $\lim\limits_{x\to1^+} f\left(x\right)$ אינו קיים, במקרה זה גם הגבול $\lim\limits_{x\to1^-} f\left(x\right)$ לא קיים.

<u>דוגמא 2</u>

$f\left(x\right)=\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$ במקרה זה הגבול $\lim_{x\to 0^+} f\left(x\right)$ קיים אבל הגבול $\lim_{x\to 0^-} f\left(x\right)$ לא קיים ולכן הנקודה $x_0=0$ היא נקודת אי רציפות מסוג שני.