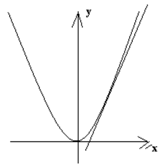
הרצאה 2

הנגזרת

הגדרת הנגזרת

מטרה – חישוב שיפוע המשיק לפונקציה $f\left(x\right)$ בנקודה x_0.

נרצה לחשב את שיפוע המשיק לפונקציה $f\left(x\right)=x^2$ בנקודה $x=2$.



המשיק עובר בנקודה $\left(2,4\right)$. לא ניתן לחשב את שיפוע הישר בעזרת נקודה אחת בלבד.

ניקח נקודה שנמצאת על הפונקציה נניח $\left(3,9\right)$ נחשב את השיפוע ונקבל $m=5$.

ככל שניקח נקודה קרובה יותר לנקודה $\left(2,4\right)$ נקבל שיפוע יותר קרוב לשיפוע המשיק.

נרשום את התוצאות בטבלה.

x	$3=2+1$	$2.5=2+0.5$	$2.1=2+0.1$	$2.01=2+0.01$
y	9	$\left(2+0.5\right)^2$	$\left(2+0.1\right)^2$	$\left(2+0.01\right)^2$
m	5	4.5	4.1	4.01

נשים לב שכאשר אנחנו לוקחים נקודה "קרובה" יותר לנקודה $\left(2,4\right)$ השיפוע מתקרב ל 4.

באופן כללי אם ניקח את הנקודה $\left(2+h,\left(2+h\right)^2\right)$ נקבל שהשיפוע הוא

$$m=\frac{\left(2+h\right)^2-2^2}{2+h-2}=\frac{\left(2+h\right)^2-2^2}{h}=\frac{4+4h+h^2-2^2}{2+h-2}=\frac{4h+h^2}{h}=4+h.$$

נשים לב שככל המרחק בין הנקודה שעל הפונקציה לנקודה הנתונה $\left(2,4\right)$ קרוב יותר לאפס (ז"א h קרוב לאפס) השיפוע קרוב יותר ל 4.

הגדרת הנגזרת

העיקרון של הגדרת הנגזרת מתבסס על הרעיון בחישוב שיפוע המשיק בדוגמא הקודמת.

$$f'\left(x\right)=\lim_{h\to0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}.$$

תרגיל

חשב בעזרת הגדרת הנגזרת את הנגזרת של $f\left(x\right)=\sin x$.

פתרון

על פי הגדרת הנגזרת, שימוש בזהות $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ והגבול $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2\sin\frac{x+h-x}{2}\cos\frac{x+h+x}{2}}{h}=$$

$$\lim_{h\to0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h/2}=\cos x$$

הגדרה

תהיי f פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה $x=x_0$.

אם קיים הגבול $L=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ אז נאמר כי הפונקציה f גזירה בנקודה $x=x_0$,

ונרשום $f'(x_0)=L$. המספר L ייקרא הנגזרת של הפונקציה בנקודה $x=x_0$.

דוגמאות

1. חשב בעזרת הגדרת הנגזרת את הנגזרת של $f(x)=\sqrt{x}$ בנקודה $(4,2)$.

על פי הגדרת הנגזרת

$$f'(4)=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}=$$

$$\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}\cdot\frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2}=\lim_{h\to0}\frac{4+h-4}{h\cdot\sqrt{4+h}+2}=\lim_{h\to0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}=\frac{1}{4}$$

2. חשב בעזרת הגדרת הנגזרת את הנגזרת של $f(x)=e^x$ בנקודה $(0,1)$.

$f'(0)=\lim\limits_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}$ המספר e מוגדר כך ש $\lim\limits_{h\to0}(1+h)=\lim\limits_{h\to0}e^h$ ז"א $e=\lim\limits_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$, ואז

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1+h-1}{h}=1\ .$$

3. חשב בעזרת הגדרת הנגזרת את הנגזרת של $f(x)=\sin x$ בנקודה $x=x_0$.

$$f'(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2\sin\frac{\mathrm{h}}{2}\cos\frac{2x_0+h}{2}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sin\frac{\mathrm{h}}{2}}{h/2}\cdot\cos\frac{2x_0+h}{2}=\cos x_0$$

השוויון הראשון נובע מהגדרת הנגזרת.

השוויון השני נובע מהזהות $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

השוויון השלישי נובע מהגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

נגזרות חד צדדיות

הגדרה

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית מסוימת של הנקודה $x=x_0$.

הגבול $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, אם הוא קיים, נקרא הימנית של $f(x)$ בנקודה x_0, היא מסומנת ע"י $f'_+(x_0)$. באופן דומה נגדיר נגזרת שמאלית בנקודה x_0 ונסמנה ע"י $f'_-(x_0)$.

תרגיל 1

חשב את הנגזרות החד-צדדיות של הפונקציה $f(x)=|x|$ בנקודה $x=0$.

פתרון

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|-0}{h}=1$$
$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|-0}{h}=-1$$

תרגיל 2

חשב את הנגזרות החד-צדדיות של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x^2-2 & x\ge 1\\ 3x-4 & x<1\end{cases}$ בנקודה $x=1$.

פתרון

על פי הגדרת הפונקציה, אם $h>0$ אזי $f(1+h)=(1+h)^2-2$, ואם $h<0$ אזי $f(1+h)=3(1+h)-4$.

$$f'_+(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)^2-2-(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1+2h+h^2-2+1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h+h^2}{h}=2$$

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3(1+h)-4-(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3+3h-4+1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3h}{h}=3.$$

משפט

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה x_0. אזי $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 אם ורק אם קיימות הנגזרות החד-צדדיות בנקודה x_0 והן שוות.

אם קיימת הנגזרת או אם קיימות הנגזרות החד-צדדיות והן שוות אז יתקיים השוויון $f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

<u>דוגמה</u>

הפונקציות בתרגילים 1,2 לא גזירות.

<u>תרגיל 3</u>

הוכח כי הפונקציה $f(x)=\begin{cases}6x+9 & x\ge 2\\ 15+\dfrac{3x^2}{2} & x<2\end{cases}$ גזירה בנקודה $x=2$.

<u>פתרון</u>

תחילה נשים לב שהפונקציה רציפה בנקודה $x=2$ מכיוון ש $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=21$.

נשים לב ש $f'_+(2)=f'_-(2)=6$. לכן מן המשפט הקודם הפונקציה גזירה בנקודה $x=2$ ומתקיים $f'(2)=6$.

<u>כללי גזירה</u>

יהיו $f(x),g(x)$ פונקציות גזירות בנקודה x, ויהי c מספר קבוע. אזי

א. $(cf(x))'=cf'(x)$.

ב. $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$.

ג. $(f(x)g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.

ד. אם $g(x)\neq 0$ אזי $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

<u>דוגמאות</u>

יש להוסיף

<u>כלל השרשרת</u>

תהי $y=f(x)$ פונקציה גזירה בנקודה $x=x_0$, ותהי $z=g(y)$ פונקציה גזירה בנקודה $y=y_0$.
אזי הפונקציה המורכבת $z=g(f(x))$ גזירה בנקודה x_0 ומתקיים השוויון

$$z'_x=\left[g(f(x_0))\right]'=g'(y_0)\cdot f'(x_0).$$

<u>דוגמאות</u>

יש להוסיף

הערה

נזכור שפונקציה רציפה הפיכה בקטע (a,b) אם ורק אם היא מונוטונית עולה/יורדת ממש ב (a,b) והפונקציה ההופכית גם רציפה.

להוסיף: דוגמא של $\tan x, \arctan x$.

נגזרת של פונקציה הפוכה

תהי $y=f(x)$ פונקציה הפיכה ורציפה בסביבת הנקודה x_0, אם $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 ואם $f'(x_0)\neq 0$ אזי גם הפונקציה ההפוכה שלה $x=g(y)$ גזירה בנקודה $y_0=f(x_0)$ ומתקיים השוויון $g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$.

דוגמא

הנגזרת של $f(x)=\arcsin x$, $-1<x<1$.

פתרון

$y=\arcsin x \Leftarrow \sin y = x$, לפי המשפט הקודם נקבל ש

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$