

הרצאה 3

נגזרת של פונקציה מהצורה $y = f(x)^{g(x)}$ כאשר $f(x) > 0$

אם $y = f(x)^{g(x)}$ אז $\ln y = g(x) \ln f(x) \Leftrightarrow \ln y = \ln f(x)^{g(x)}$

נגזור את שני האגפים ונקבל

$$\frac{y'}{y} = (g(x) \ln f(x))'$$

דוגמה

נחשב את הנגזרת של $y = x^{\sin x}$ כאשר $0 < x$

$$\frac{y'}{y} = (\sin x \ln x)' \Rightarrow y' = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

חקירת פונקציות

אסימפטוטה משופעת

הישר $y = ax + b$ נקרא אסימפטוטה משופעת של הפונקציה $f(x)$ ב $+\infty$ אם

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

במקרה המיוחד $a = 0$ האסימפטוטה נקראת גם האסימפטוטה האופקית של $f(x)$

משפט

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע (a, ∞) . אם קיימים הגבולות

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$$

אז הישר $y = ax + b$ הוא האסימפטוטה המשופעת היחידה ב $+\infty$ של $f(x)$

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע $(-\infty, c)$. אם קיימים הגבולות

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$$

אז הישר $y = ax + b$ הוא האסימפטוטה המשופעת היחידה ב $-\infty$ של $f(x)$

תרגיל

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$$

מצא את כל האסימפטוטות לגרף של הפונקציה

פתרון

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} = -5$$

לכן הישר $y = x - 5$ הוא אסימפטוטה משופעת ב ∞ של $f(x)$

נבדוק אסימפטוטה משופעת ב $-\infty$

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} = -5$$

הישר $y = x - 5$ הוא גם אסימפטוטה משופעת ב $-\infty$ של $f(x)$.

מציאת נקודות קיצון

הגדרה

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה x_0 . נאמר כי ל $f(x)$ יש מינימום מקומי בנקודה x_0 אם קיימת סביבה מסוימת x_0 אשר בה מתקיים $f(x) > f(x_0)$ לכל x בסביבה זו. נאמר כי ל $f(x)$ קיים מקסימום מקומי בנקודה x_0 אם קיימת סביבה מסוימת של x_0 אשר לכל x בתוכה מתקיים $f(x) < f(x_0)$.

משפט פרמה (ראינו שיעור שעבר)

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע הפתוח (a, b) וגזירה בנקודה פנימית x_0 . אם $f(x)$ מקבלת בנקודה x_0 את ערכה הגדול ביותר או את ערכה הקטן ביותר אזי $f'(x_0) = 0$.

עבור פונקציה נתונה $f(x)$ פתרון המשוואה $f'(x) = 0$ וערכי x שעבורם הפונקציה לא מוגדרת נותן נקודות חשודות לקיצון הנקראות גם נקודות קריטיות.

דוגמה

נמצא את נקודות הקריטיות של הפונקציה $f(x) = \sqrt{x} \ln^2 x$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln^2 x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot 2 \ln x \Rightarrow \frac{\ln^2 x}{2\sqrt{x}} + \frac{2 \ln x}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \ln^2 x + 4 \ln x = 0$$

$$\text{נציב } t = \ln x \text{ ונקבל } t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0, t_2 = -4$$

נציב חזרה ונקבל $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $\ln x = -4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^4}$ קיבלנו שהנקודות החשודות לקיצון הן

$$\left(1, 0\right), \left(\frac{1}{e^4}, \frac{16}{e^2}\right)$$

נשים לב שהנגזרת מוגדרת בכל תחום ההגדרה של הפונקציה.

תחומי עלייה ותחומי ירידה של פונקציה

משפט

תהיי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע (a, b) . אזי

א. $f(x)$ מונוטונית עולה בקטע זה אם ורק אם $f'(x) \geq 0$ לכל $a < x < b$.

ב. $f(x)$ מונוטונית יורדת בקטע זה אם ורק אם $f'(x) \leq 0$ לכל $a < x < b$.

דוגמה

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = \sqrt{3} \cos x + \sin x \text{ בתחום } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

א. מצא את הנקודות חיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה שלה הפונקציה.

פתרון

א. חיתוך עם ציר ה- x : $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$.

התחום הוא: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ולכן נקודת החיתוך היא $(-\frac{\pi}{3}, 0)$.

חיתוך עם ציר ה- y : $f(0) = \sqrt{3}$ ולכן נקודת החיתוך היא $(0, \sqrt{3})$.

ב. כדי למצוא את נקודות הקיצון נגזור ונשווה לאפס.

$$f(x) = \sqrt{3} \cos x + \sin x$$

$$f'(x) = -\sqrt{3} \sin x + \cos x$$

$$-\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$$

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k$$

התחום הוא $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ נמצא תחומי עלייה וירידה ע"י טבלה

x	$-\frac{\pi}{2}$	$< x <$	$\frac{\pi}{6}$	$< x <$	$\frac{\pi}{2}$
y		עולה		יורד	
y'		חיובי		שלילי	

$$f'(0) = 1 > 0, f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 < 0$$

נקודות קיצון: $\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$ מקסימום, $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$ מינימום בקצה, $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ מינימום בקצה.

ג. תחומי עלייה $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{6}$. תחומי ירידה $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$.

דרכים לקבוע האם נקודת קיצון היא מינימום או מקסימום

מבחן הנגזרת הראשונה

תהי x_0 נקודה קריטית של הפונקציה $f(x)$, ונניח כי $f(x)$ רציפה בנקודה x_0 , גזירה בסביבת הנקודה x_0 פרט אולי לנקודה x_0 עצמה. אזי

א. אם $f'(x)$ מחליפה סימן משלילי לחיובי בנקודה x_0 אזי x_0 היא נקודת מינימום מקומי של $f(x)$.

ב. אם $f'(x)$ מחליפה סימן מחיובי לשלילי בנקודה x_0 אזי x_0 היא נקודת מקסימום מקומי של $f(x)$.

ג. אם $f'(x)$ שומרת סימן בנקודה x_0 אזי x_0 אינה נקודת קיצון של $f(x)$.

תרגיל

נתונה הפונקציה $f(x) = |x - 2.25|e^{x^2}$.

- א. מצא את הנקודות הקריטיות של הפונקציה.
ב. קבע עבור כל נקודה מסעיף א האם היא נקודת מינימום/מקסימום/לא נקודת קיצון.

פתרון

א. ניתן לרשום את הפונקציה באופן הבא:

$$f(x) = \begin{cases} (x-2.25)e^{x^2} & x > 2.25 \\ -(x-2.25)e^{x^2} & x \leq 2.25 \end{cases}$$

עבור $x > 2.25$ נקבל ש $f'(x) = e^{x^2} + 2x(x-2.25)e^{x^2} \Leftarrow f'(x) = (2x^2 - 4.5x + 1)e^{x^2}$.

עבור $x < 2.25$ נקבל ש $f'(x) = -(2x^2 - 4.5x + 1)e^{x^2}$.

נשים לב ש $f'_+(2.25) = e^{5.0625}$ ו $f'_-(2.25) = -e^{5.0625}$.

הנגזרות החד צדדיות לא שוות בנקודה $x = 2.25$, ולכן הנגזרת לא קיימת.

כדי לבדוק לאילו ערכי x הנגזרת מתאפסת נפתור את המשוואה $2x^2 - 4.5x + 1 = 0$.

$$x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{4}$$

סה"כ קיבלנו שהנקודות הקריטיות הן: $(2.25, 0), \left(2, \frac{e^4}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, 2e^{\frac{1}{16}}\right)$.

ב.

נבדוק עבור כל אחד מהמקרים האם הנגזרת מחליפה סימן.

ראינו כבר שעבור $x = 2.25$ הנגזרת מחליפה סימן משלילי לחיובי ז"א $(2.25, 0)$ היא נקודות מינימום.

מכיוון שהנגזרת מוגדרת בכל נקודה בקטע $(2, 2.25)$ נקבל ממשפט רול שלכל $x \in (2, 2.25)$ הנגזרת לא משנה סימן ז"א ניתן להציב כל x בקטע כדי לדעת את סימן הנגזרת אחרי $x = 2$. נקבל ש $f'(2.1)$ שלילי.

באותו אופן נבחר נקודה בקטע $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$. $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ חיובי.

סה"כ קיבלנו שהנגזרת משנה סימן בנקודה מחיובי לשלילי ולכן הנקודה $\left(2, \frac{e^4}{4}\right)$ היא נקודת מקסימום.

עבור $x = \frac{1}{4}$. נציב בנגזרת נקודה מהקטע $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$ נניח 0 ונקבל ש $f'(0)$ שלילי.

ראינו ש $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ חיובי.

הנגזרת ב $x = \frac{1}{4}$ משנה סימן משלילי לחיובי, ולכן הנקודה $\left(\frac{1}{4}, 2e^{\frac{1}{16}}\right)$ היא נקודת מינימום.

מבחן הנגזרת השנייה

תהי x_0 נקודה קריטית של הפונקציה $f(x)$, ונניח כי $f(x)$ גזירה פעמיים בנקודה x_0 . אזי

- א. אם $f''(x) > 0$ אז x_0 היא נקודת מינימום מקומי של $f(x)$.
- ב. אם $f''(x) < 0$ אז x_0 היא נקודת מקסימום מקומי של $f(x)$.
- ג. אם $f''(x) = 0$ אז לא ניתן לדעת כלום על x_0 משיטה זו ויש לבדוק את הנקודה x_0 בשיטה אחרת.

הערה

נשים לב שלא ניתן להשתמש במבחן הנגזרת השנייה בתרגיל הקודם עבור $x = 2.25$ מכיוון שהנגזרת לא מוגדרת שם.

תרגיל

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x) = 6\sqrt[3]{x} - \ln x$.

פתרון

נמצא תחילה את הנקודות הקריטיות

$$f'(x) = \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = 2x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = 6x^{\frac{1}{3}} - \ln x$$

$$\text{נפתור את המשוואה } \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x - x^{\frac{2}{3}} = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}}(2x^{\frac{1}{3}} - 1) = 0 \text{ מכיוון ש } x \neq 0 \text{ נקבל ש}$$

$$x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^{\frac{1}{3}} - 1 = 0$$

קיבלנו נקודה קריטית $\left(\frac{1}{8}, 3 + \ln 8\right)$.

נבדוק בעזרת מבחן הנגזרת השנייה האם הנקודה היא מינימום/מקסימום.

$$f''\left(\frac{1}{8}\right) > 0 \Leftrightarrow f''(x) = -\frac{4}{3x^{\frac{5}{3}}} + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow f''(x) = -\frac{4}{3}x^{-\frac{5}{3}} + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = 2x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{x}$$

והנקודה $\left(\frac{1}{8}, 3 + \ln 8\right)$ היא נקודת מינימום.

הערה

נניח שהפונקציה $f(x)$ גזירה בסביבת הנקודה x_0 ו $f'(x_0) = 0$.

אם $f'(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ אז מספיק לבדוק את הסימן של $\frac{g'(x_0)}{h(x_0)}$ כדי להשתמש במבחן הנגזרת

השנייה.

הסבר

$$f''(x_0) = \frac{g'(x_0)h(x_0) - g(x_0)h'(x_0)}{h^2(x_0)} \Leftarrow f''(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)} \Leftarrow f'(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

מכיוון ש $f'(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ ו $f'(x_0) = 0$ נקבל ש $g(x_0) = 0$ ואז

$$f''(x_0) = \frac{g'(x_0)h(x_0) - g(x_0)h'(x_0)}{h^2(x_0)} = \frac{g'(x_0)h(x_0)}{h^2(x_0)} = \frac{g'(x_0)}{h(x_0)}$$

תרגיל

$$f(x) = \frac{x \ln x}{\ln x - 2}$$

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה

פתרון

נגזור את הפונקציה ונשווה לאפס.

$$f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(\ln x - 2) - \ln x}{(\ln x - 2)^2} \Leftarrow f(x) = \frac{x \ln x}{\ln x - 2}$$

יש לפתור את המשוואה $(\ln x + 1)(\ln x - 2) - \ln x = 0$ נציב $t = \ln x$ ונקבל

$$t_1 = 1 + \sqrt{3}, t_2 = 1 - \sqrt{3} \Leftarrow t^2 - 2t - 2 = 0 \Leftarrow (t+1)(t-2) - t = 0$$

הנקודות הקריטיות הן $x_1 = e^{1+\sqrt{3}}, x_2 = e^{1-\sqrt{3}}$

נשתמש בהערה הקודמת כדי לבדוק את סוג הקיצון.

מכיוון ש $(\ln x - 2)^2 > 0$ מספיק לבדוק את סימן הנגזרת עבור $g(x) = \ln^2 x - 2 \ln x - 2$

$$g'(x) = \frac{2 \ln x - 2}{x} \text{ ואז } g'(e^{1-\sqrt{3}}) > 0, g'(e^{1+\sqrt{3}}) < 0$$

עבור $x = e^{1+\sqrt{3}}$ נקבל מינימום ועבור $x = e^{1-\sqrt{3}}$ נקבל מקסימום.

הגדרה

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בנקודה x_0 . נאמר כי $f(x)$ קמורה כלפי מטה בנקודה x_0 אם קיימת סביבה של הנקודה x_0 אשר בה הגרף של הפונקציה נמצא מתחת לישר המשיק לגרף בנקודה זו.

כלומר, קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ מתקיים

$$f(x) < f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

באופן דומה, נאמר כי $f(x)$ קמורה כלפי מעלה בנקודה x_0 אם קיימת סביבה של הנקודה x_0 אשר בה הגרף של הפונקציה נמצא מעל לישר המשיק לגרף בנקודה זו.

כלומר, קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ מתקיים

$$f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

אם $f(x)$ היא פונקציה גזירה בקטע הפתוח (a,b) , אזי נאמר כי $f(x)$ קמורה כלפי מטה בקטע הפתוח (a,b) אם היא קמורה כלפי מטה בכל נקודה של הקטע ונאמר כי $f(x)$ קמורה כלפי מעלה בקטע הפתוח (a,b) אם היא קמורה כלפי מעלה בכל נקודה של הקטע.

נקודות פיתול

נאמר כי הנקודה x_0 היא נקודת פיתול של הפונקציה $f(x)$ אם $f(x)$ רציפה וגזירה בסביבת הנקודה x_0 כך שבסביבה שמשמאל ל x_0 הפונקציה קעורה כלפי מטה ובסביבה שממין ל x_0 הפונקציה קעורה כלפי מעלה (או להפך).

משפט

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בסביבת הנקודה x_0 . אם הנגזרת השנייה $f''(x)$ מחליפה סימן בנקודה x_0 אזי x_0 היא נקודת פיתול של $f(x)$.

תרגיל

מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x) = x\sqrt{2x-1}$.

פתרון

נגזור פעמיים את הפונקציה ונשווה לאפס.

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} + \frac{\sqrt{2x-1} - \frac{x}{\sqrt{2x-1}}}{2x-1} \Leftarrow f'(x) = \sqrt{2x-1} + \frac{x}{\sqrt{2x-1}} \Leftarrow f(x) = x\sqrt{2x-1}$$

$$\text{סה"כ נקבל ש } f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} + \frac{2x-1-x}{(2x-1)\sqrt{2x-1}} \\ 2x-1+2x-1-x=0$$

$$\text{נקודה חשודה לפיתול היא } x = \frac{2}{3} \text{ נשים לב ש } f''(x) = \frac{3x-2}{(2x-1)\sqrt{2x-1}} \text{ ואז עבור } x < \frac{2}{3} \text{ נקבל}$$

$$\text{ש } f''(x) < 0 \text{ ועבור } x > \frac{2}{3} \text{ נקבל ש } f''(x) > 0 \text{ הנגזרת השנייה משנה סימן ולכן הנקודה}$$

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) \text{ היא נקודת פיתול.}$$

משפט

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. אזי ל $f(x)$ יש לפחות נקודת מינימום מוחלט אחת ונקודת מקסימום מוחלט אחת בתוך הקטע.

כיצד למצוא את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר של הפונקציה בקטע $[a,b]$

שלב 1

מציאת הנקודות החשודות בקטע הפתוח (a,b) (הנקודות שבהן הנגזרת מתאפסת והנקודות שבהן הנגזרת לא מוגדרת).

שלב 2

חישוב $f(a), f(b)$.

שלב 3

מבין שיעורי ה y של הנקודות שמצאת בשלב 1 ו $f(a), f(b)$ המספר הגדול ביותר הוא הערך הגדול ביותר והמספר הקטן ביותר הוא הערך הקטן ביותר.

תרגיל

$$\text{הוכח כי לכל } x \in [-2,2] \text{ מתקיים האי שוויון הבא: } (x+2)\sqrt{4-x^2} \leq 3\sqrt{3}.$$

פתרון

יש למצוא את המקסימום המוחלט של הפונקציה $f(x) = (x+2)\sqrt{4-x^2}$ בקטע $(-2,2)$.

שלב 1

נמצא את הנקודות החשודות של הפונקציה $f(x) = (x+2)\sqrt{4-x^2}$ בקטע $[-2,2]$.

$$f(x) = (x+2)\sqrt{4-x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \sqrt{4-x^2} + (x+2) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2+2x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{4-x^2} \cdot \sqrt{4-x^2} - (x^2+2x)}{\sqrt{4-x^2}}, f'(x) = \frac{4-x^2-x^2-2x}{\sqrt{4-x^2}}, f'(x) = \frac{-2x^2-2x+4}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\text{הנגזרת מתאפסת כאשר } \frac{-2x^2-2x+4}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow -2x^2-2x+4 = 0 \Leftrightarrow x^2+x-2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0$$

$$.x_1 = -2, x_2 = 1$$

נפסל $x = -2$.

הנקודה החשודה היא $(1, 3\sqrt{3})$.

שלב 2

$$.f(-2) = 0, f(2) = 0$$

שלב 3

המספר הגדול ביותר מבין המספרים $0, 3\sqrt{3}$ הוא $3\sqrt{3}$ ולכן המקסימום המוחלק הוא $3\sqrt{3}$ ז"א

$$.x \in [-2,2] \text{ לכל } f(x) \leq 3\sqrt{3} \text{ ולכן מתקיים } (x+2)\sqrt{4-x^2} \leq 3\sqrt{3} \text{ לכל } x \in [-2,2].$$