הרצאה 4

משפט פרמה

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע הפתוח (a,b) וגזירה בנקודה פנימית x_0. אם $f(x)$ מקבלת בנקודה x_0 את ערכה הגדול ביותר או את ערכה הקטן ביותר אזי $f'(x_0)=0$.

הערה

שימו לב לחשיבות הדרישה ש $f(x)$ תהייה גזירה.

הפונקציה $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$ מקבלת ערך מינימאלי כאשר $x=1$.

הנגזרת לא קיימת במקרה זה.

משפט רול

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע הסגור $[a,b]$ המקיימת את התנאים הבאים:

א. $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$.

ב. $f(x)$ גזירה בקטע הפתוח (a,b).

ג. $f(a)=f(b)$.

אזי קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $f'(c)=0$.

תרגיל ממבחן (מועד ב סמסטר א 2009)

כמה פתרונות יש למשוואה $x\sin x+\cos x=x^2$ בקטע $[0,\infty)$.

פתרון

במידה ויאפשר הזמן

משפט הערך הממוצע של לגראנז

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b).

אזי קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

תרגיל ממבחן (מועד א סמסטר א 2012)

מצא נקודת/נקודות לגרנז' של הפונקציה $f(x)=x^3-x^2-14x+24$ בקטע $[-5,5]$.

פתרון

$f'(x)=3x^2-2x-14$ יש למצוא נקודה c כך ש $11=\dfrac{54-(-56)}{10}=\dfrac{f(5)-f(-5)}{5-(-5)}=f'(c)$

ז"א $3x^2-2x-14=11\Rightarrow 3x^2-2x-25=0\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{304}}{6}$

וקיבלנו את נקודות לגראנז'.

תרגיל ממבחן (מועד ב סמסטר א 2012)

מצא נקודת לגרנז' c של הפונקציה $f(x)=x^4$ ב $[1,3]$.

פתרון

במידה ויאפשר הזמן...

משפט הערך הממוצע של קושי

יהיו $f(x)$ ו $g(x)$ שתי פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירות בקטע הפתוח (a,b), ובנוסף לכך $g'(x)\neq 0$ לכל $a<x<b$. אזי קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

דוגמה

לתת דוגמא לשתי פולינומים ולהראות שאכן המשפט מתקיים.

משפט לופיטל

יהיו $f(x)$ ו $g(x)$ פונקציות גזירות בסביבת הנקודה $x=a$, פרט אולי לנקודה a עצמה, נניח כי

א. קיימים הגבולות $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$.

ב. $g'(x)\neq 0$ לכל $x\neq a$ בסביבת הנקודה a.

ג. קיים הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

אזי קיים הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ומתקיים $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

הערה

לא רשמתי כאן את כל המקרים שבהם מטפל משפט לופיטל.

תרגיל ממבחן סמסטר א מועד א 2009

חשב: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{1-\sin x}$.

פתרון

נשים לב שכל התנאים של משפט לופיטל מתקיימים ולכן מספיק לחשב את הגבול

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\sin 2x}{-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-4\sin x\cos x}{-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}4\sin x=4.$$