

## הרצאה 5

### האינטגרל הלא מסוים

#### הגדרה

פונקציה  $F(x)$  תקרא פונקציה קדומה לפונקציה  $f(x)$  בתחום  $D$ , אם עבור כל  $x$  בתחום  $D$  מתקיים  $F'(x) = f(x)$ .

#### הערה

אם  $F(x)$  פונקציה קדומה של  $f(x)$  אז גם  $F(x) + c$ , כאשר  $c$  מספר קבוע, היא פונקציה קדומה של  $f(x)$  מכיוון ש  $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$ . קיבלנו שלפונקציה  $f(x)$  יש אינסוף פונקציות קדומות.

#### דוגמא

הפונקציה  $F(x) = x^2$  היא פונקציה קדומה של  $f(x) = 2x$  מכיוון ש  $F'(x) = f(x)$ .  
 הפונקציה  $F(x) = x^2 + 1$  היא פונקציה קדומה של  $f(x) = 2x$  מכיוון ש  $F'(x) = f(x)$ .  
 באופן כללי הפונקציה  $F(x) = x^2 + c$  היא פונקציה קדומה של  $f(x) = 2x$  מכיוון ש  $F'(x) = f(x)$ .

#### תרגיל

הוכח שהפונקציה  $\ln(x + \sqrt{x^2 + a})$  היא קדומה ל  $\frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$ .

#### פתרון

נסמן  $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a})$ ,  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$  צריך להוכיח ש  $F'(x) = f(x)$ .

$$F'(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + a})'}{x + \sqrt{x^2 + a}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + a} + x}{\sqrt{x^2 + a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$$

#### הגדרה

תהי  $f(x)$  בעלת פונקציה קדומה  $F(x)$ . אוסף כל הפונקציות הקדומות  $F(x) + C$  של  $f(x)$  נקרא האינטגרל הלא מסוים של  $f(x)$ , אותו נסמן  $\int f(x)dx = F(x) + c$ .

#### תכונות האינטגרל הלא מסוים

1. אם  $f(x)$  גזירה אזי  $\int f'(x)dx = f(x) + c$ .
2. לכל קבוע  $a$  מתקיים  $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$ .
3. האינטגרל של הסכום (או הפרש) של שתי פונקציות שווה לסכום (או הפרש) האינטגרלים  $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ .

#### טבלה של אינטגרלים מיידיים

	$f(x)$	$F(x)$
1.	$(ax + b)^n$ $n \neq -1$	$\frac{(ax + b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + C$
2.	$\frac{1}{ax + b}$	$\frac{1}{a} \ln ax + b  + C$
3.	$\sin x$	$-\cos x + C$
4.	$\cos x$	$\sin x + C$
5.	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
6.	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$

7.	$a^x$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
8.	$e^x$	$e^x$
9.	$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
10.	$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C$
11.	$\sinh x$	$\cosh x + C$
12.	$\cosh x$	$\sinh x + C$

### 1 הערה

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \quad \text{אז} \quad \int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{אם}$$

הסבר:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{ש} \quad f(ax+b) \quad \text{נקבל ש}$$

מכלל השרשרת ומכיוון ש  $(ag(x))' = ag'(x)$  נקבל ש

$$\left( \frac{1}{a} F(ax+b) \right)' = \frac{1}{a} \cdot (F(ax+b))' = \frac{1}{a} \cdot (ax+b)' \cdot f(ax+b) = \frac{1}{a} \cdot a \cdot f(ax+b) = f(ax+b)$$

### 2 הערה

תפקידו של  $dx$  ברישום  $\int f(x)dx$  הוא שביצוע האינטגרל הוא עבור המשתנה  $x$ .

$$\int (x^2 + s)dx = \frac{x^3}{3} + sx + C, \quad \int (x^2 + s)ds = x^2s + \frac{s^2}{2} + C \quad \text{למשל:}$$

### דוגמאות לשימוש באינטגרלים מיידיים

$$1. \quad n \neq -1 \quad \text{כאשר} \quad \int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$$

$$\text{דוגמא:} \quad \int (3x+2)^3 dx = \frac{(3x+2)^4}{3 \cdot 4} = \frac{(3x+2)^4}{12}$$

$$2. \quad \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$$

$$\text{דוגמא:} \quad \int \frac{1}{5x+2} dx = \frac{\ln|5x+2|}{5} + c$$

$$3. \quad a > 0, a \neq 1 \quad \text{כאשר} \quad \int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c$$

$$\text{דוגמא:} \quad \int 2^{4x+1} dx = \frac{2^{4x+1}}{4 \ln 2} + c$$

$$4. \quad \int \cos(ax+b)dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + c, \quad \int \sin(ax+b)dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c$$

$$\text{דוגמא:} \quad \int \sin(3x+\pi)dx = \frac{-\cos(3x+\pi)}{3} + c$$

$$5. \quad \int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{\operatorname{ctg}(ax+b)}{a} + c, \quad \int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{\operatorname{tg}(ax+b)}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad .6$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + c \quad , \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad .7$$

### חישוב אינטגרלים בעזרת האינטגרלים המיוחדים

#### תרגיל

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \quad .7 \quad \int \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^3} dx \quad .ג \quad \int \left(1 + \sqrt[4]{x^5}\right)^2 dx \quad .ב \quad \int \sin^2 x dx \quad .א$$

#### פתרון

$$\int \sin^2 x dx \quad .א \quad \text{נשתמש בזהות} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x$$

.ב

$$\int \left(1 + \sqrt[4]{x^5}\right)^2 dx = \int \left(1 + x^{\frac{5}{4}}\right)^2 dx = \int \left(1 + 2x^{\frac{5}{4}} + x^{\frac{10}{4}}\right) dx = x + \frac{2x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}} + \frac{x^{\frac{14}{4}}}{\frac{14}{4}} + c = x + \frac{8x^{\frac{9}{4}}}{9} + \frac{2x^{\frac{14}{4}}}{7} + c$$

.ג

$$\int \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^3} dx = \int \left(2 + \frac{1}{x} + x^{-3}\right) dx = 2x + \ln|x| - \frac{1}{2x^2}$$

.ד

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

### חישוב אינטגרלים בשיטת ההצבה

#### משפט

תהי  $F(x)$  פונקציה קדומה של הפונקציה  $f(x)$  בקטע מסוים  $I$ , ותהי  $\phi(t)$  פונקציה גזירה בקטע מסוים  $J$ , כך שלכל  $t \in J$  מתקיים  $\phi(t) \in I$ . אזי  $\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t)) + c$ .

#### דוגמא

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx \quad \text{נבחר בהצבה} \quad x = \phi(t) = \sqrt{t} \quad \text{אזי} \quad t = x^2 \quad \text{ו} \quad dt = 2x dx$$

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| = \ln(1+x^2)$$

#### תרגיל

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx \quad .ג \quad \int \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}} dx \quad .ב \quad \int \tan x dx \quad .א$$

#### פתרון

$$\int \tan x dx \quad .א \quad \text{נציב} \quad t = \cos x \quad \text{ואז} \quad dt = -\sin x dx$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| = -\ln|\cos x|$$

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx + 2 \int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx \quad \text{ב.}$$

עבור המחובר השני ניתן להשתמש בנוסחה ולקבל  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$

$$2 \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = 2 \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$$

נשאר לחשב את האינטגרל של המחובר הראשון  $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$

עבור המחובר הראשון נשתמש בשיטת ההצבה:

נציב  $t = x^2$  ואז  $dt = 2x dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{9-t}} = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{t}{3}\right) = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{x^2}{3}\right)$$

סה"כ נקבל

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}} dx = 2 \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{x^2}{3}\right)$$

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{1}{e^x + \frac{1}{e^x}} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx \quad \text{ג.}$$

נציב  $t = e^x$  ואז  $dt = e^x dx$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \arctan t = \arctan e^x$$

### חישוב אינטגרלים הכוללים פונקציות שורש

#### תרגיל

פתור את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx \quad \text{א.} \quad \int \frac{1}{1+\sqrt{x+2}} dx \quad \text{ב.} \quad \int \frac{x}{\sqrt{x+4}\sqrt{x}} dx \quad \text{ג.}$$

#### פתרון

א.

נציב  $x = t^2$  ואז  $dx = 2t dt$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = \int \frac{t \cdot 2t}{1+t^2} dt = \int \frac{2t^2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2} dt =$$

$$2 \left( \int 1 dt - \int \frac{1}{1+t^2} dt \right) = 2t - 2 \arctan t = 2\sqrt{x} - 2 \arctan \sqrt{x} + c$$

ב.

נציב  $t = 1 + \sqrt{x+2}$  ואז

$$dx = 2(t-1)dt \Leftrightarrow x = (t-1)^2 - 2 \Leftrightarrow x+2 = (t-1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = t-1$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x+2}} dx = \int \frac{2t-2}{t} dt = \int 2 dt - \int \frac{2}{t} dt = 2t - 2 \ln|t| = 2 + 2\sqrt{x+2} - 2 \ln(1 + \sqrt{x+2}) + c$$

ג.

נציב  $x = t^4$  ואז  $dx = 4t^3 dt$

נבצע חלוקת פולינומים ונקבל ש

$$\int \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx = \int \frac{t^4 \cdot 4t^3}{t^2 + t} dt = \int \frac{4t^6}{t+1} dt$$

$$\dots \text{ומכאן קל להמשיך} \dots \frac{t^6}{t+1} = t^5 - t^4 + t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1}$$

**תרגיל**

תעבור לביטוי רציונאלי בחישוב של האינטגרל

$$\int \frac{\sqrt{x+2}}{1 + \sqrt[4]{x+2} + \sqrt[3]{x+2}} dx$$

**פתרון**

המחלק המשותף המינימאלי של 2, 4, 3 הוא 12 ולכן נציב  $x+2 = t^{12}$

$$dx = 12t^{11} dt \quad \int \frac{\sqrt{x+2}}{1 + \sqrt[4]{x+2} + \sqrt[3]{x+2}} dx = \int \frac{t^6 \cdot 12t^{11}}{1 + t^3 + t^4} dt = \int \frac{12t^{17}}{1 + t^3 + t^4} dt$$

**אינטגרציה לפי חלקים**

נניח ש  $u, v$  הן פונקציות של  $x$  על פי כלל הגזירה של מכפלת פונקציות נקבל ש  $(uv)' = u'v + uv'$  ולכן  $uv' = (uv)' - u'v$

מכאן נקבל את הנוסחה הבאה:  $\int uv'dx = uv - \int u'v dx$

**תרגיל**

חשב בעזרת אינטגרציה בחלקים את האינטגרלים הבאים:

$$\int x^2 \cos \frac{x}{2} dx$$

**פתרון**

$$u' = 2x \quad u = x^2$$

נסמן  $v = 2 \sin \frac{x}{2}$  ואז  $v' = \cos \frac{x}{2}$

נשתמש בנוסחה  $\int uv'dx = uv - \int u'v dx$  ונקבל

$$(1) \int x^2 \cos \frac{x}{2} dx = 2x^2 \sin \frac{x}{2} - \int 4x \sin \frac{x}{2} dx$$

נשאר לחשב את האינטגרל  $\int 4x \sin \frac{x}{2} dx$

נשתמש שוב באינטגרציה בחלקים

$$u' = 4 \quad u = 4x$$

נסמן  $v = -2 \cos \frac{x}{2}$  ואז  $v' = \sin \frac{x}{2}$

$$\int 4x \sin \frac{x}{2} dx = -8x \cos \frac{x}{2} + \int 8 \cos \frac{x}{2} dx = -8x \cos \frac{x}{2} + 16 \sin \frac{x}{2}$$

נציב ב (1) ונקבל

$$(1) \int x^2 \cos \frac{x}{2} dx = 2x^2 \sin \frac{x}{2} + 8x \cos \frac{x}{2} - 16 \sin \frac{x}{2}$$