הרצאה 6

פתרון אינטגרלים של פונקציות רציונליות

פונקציה רציונלית $\frac{P(x)}{Q(x)}$ נקראת פשוטה אם מעלת הפולינום $P(x)$ קטנה ממעלת הפולינום $Q(x)$.

בעזרת חילוק פולינומים ניתן להגיע לפונקציה רציונלית פשוטה.

אינטגרציה של שברים אלגברים

שלב 1

אם מעלת המונה גדולה או שווה למנת המכנה יש לחלק את המונה במכנה והציג את השבר כסכום של החלק השלם ופונקציה רציונאלית $\frac{R(x)}{Q(x)}$ כאשר מעלת הפולינום $R(x)$ קטנה ממעלת הפולינום $Q(x)$

.

שלב 2

א. כאשר חזקת המונה קטנה מחזקת המכנה יש לפרק את המכנה של השבר האלגברי לגורמים.
ב. יש לרשום את הצגת השבר האלגברי כסכום של מחוברים.
ג. יש לפתור את האינטגרל של כל אחד מהמחוברים בנפרד.

דוגמא

$$\frac{x^3}{x+2}=\left(x^2-2x+4\right)-\frac{8}{x+2}.$$

נלמד לפתור אינטגרלים מהצורה $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$.

נשים לב ש $Q'(x)=2x+p$ ואז ניתן לרשום את השבר באופן הבא

$\frac{\frac{a}{2}(2x+p)+b-\frac{pa}{2}}{x^2+px+q}$ נסמן $t=b-\frac{pa}{2}$ ונשאר לנו לפתור את האינטגרל הבא:

$$\frac{a}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+t\int\frac{1}{x^2+px+q}dx.$$

את האינטגרל של המחובר הראשון אנחנו יודעים לפתור בעזרת שיטת ההצבה.

נשאר ללמוד לפתור את האינטגרל $\int\frac{1}{x^2+px+q}dx$.

דוגמא

נפתור את האינטגרל $\int\frac{3x+5}{x^2+2x+1}dx$.

נשים לב ש $Q'(x)=2x+2$.

$$\int\frac{3x+5}{x^2+2x+1}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+1}dx+2\int\frac{1}{x^2+2x+1}dx.$$

המחובר הראשון ניתן לפתור בעזרת שיטת ההצבה ולקבל $\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+1}dx=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+1\right)$.

המחובר השני נפתור באופן הבא: $2\int\frac{1}{x^2+2x+1}dx=2\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=\frac{-2}{x+1}$.

סה"כ נקבל $\int\frac{3x+5}{x^2+2x+1}dx=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+1\right)-\frac{2}{x+1}$.

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx$$

מקרה 1

$$p^2-4q=0$$

במקרה כזה ניתן לרשום $\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \int \frac{1}{(x+n)^2}dx = -\frac{1}{x+n}$.

דוגמא

$\int \frac{1}{x^2+6x+9}dx$ נשים לב ש $6^2-4\cdot 9=0$.

$$\int \frac{1}{x^2+6x+9}dx = \int \frac{1}{(x+3)^2}dx = -\frac{1}{x+3}+c.$$

מקרה 2

$$p^2-4q<0$$

ניתן לרשום את x^2+px+q באופן הבא

$$x^2+px+q = x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}$$

נשתמש באינטגרל המידי $\int \frac{1}{(x+b)^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x+b}{a}$.

דוגמא

$$\int \frac{1}{x^2+4x+8}dx = \int \frac{1}{x^2+4x+4+4}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+4}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+2^2}dx = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{2}$$

מקרה 3

$p^2-4q>0$ ואז למשוואה $x^2+px+q=0$ יש שני פתרונות $x_1=\alpha, x_2=\beta$ ואז $x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta)$.

$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \int \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}dx = \frac{1}{\alpha-\beta}\int\left(\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x-\beta}\right)dx$ וקיבלנו אינטגרל שאנחנו יודעים לפתור.

דוגמא

$$\int \frac{1}{x^2+4x+3}dx = \int \frac{1}{(x+1)(x+3)}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+3}dx =$$

$$\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x+3|$$

נלמד בשיעור לפתור אינטגרלים מהצורה $\frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}} = \frac{ax+b}{\sqrt{x^2+px+q}}$.

נשים לב ש $Q'(x)=2x+p$ ואז ניתן לרשום את השבר באופן הבא

$\dfrac{\frac{a}{2}(2x+p)+b-\frac{pa}{2}}{\sqrt{x^2+px+q}}$ נסמן $t=b-\frac{pa}{2}$ ונשאר לנו לפתור את האינטגרל הבא:

$$\frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{\sqrt{x^2+px+q}}dx + t\int \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}dx.$$

את האינטגרל של המחובר הראשון אנחנו יודעים לפתור בעזרת שיטת ההצבה.

נשאר ללמוד לפתור את האינטגרל $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}dx$.

מקרה 1

$p^2-4q=0$

במקרה כזה ניתן לרשום $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{(x+n)^2}}dx=\int \frac{1}{x+n}dx=\ln|x+n|+C$.

דוגמא

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+9}}dx$ נשים לב ש $6^2-4\cdot 9=0$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+9}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{(x+3)^2}}dx=\int \frac{1}{x+3}dx=\ln|x+3|+C .$$

מקרה 2

$p^2-4q<0$

ניתן לרשום את x^2+px+q באופן הבא

$$x^2+px+q=x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}$$

נשתמש באינטגרל המידי $\int \frac{1}{\sqrt{(x+b)^2+a^2}}dx=\ln\left((x+b)+\sqrt{(x+b)^2+a^2}\right)$.

דוגמא

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+8}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+4+4}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+4}}dx=\ln\left((x+2)+\sqrt{(x+2)^2+4}\right)$$

מקרה 3

$p^2-4q>0$ ואז ניתן לקבל m,n כך ש $x^2+px+q=(x+n)^2-m^2$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{(x+n)^2-m^2}}dx=\ln\left|(x+n)+\sqrt{(x+n)^2-m^2}\right|+C .$$

דוגמא

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2-1^2}}dx=\ln\left|(x+2)+\sqrt{(x+2)^2-1^2}\right| .$$

מקרה 4

$p^2-4q>0$ ואז ניתן לקבל m,n כך ש $-x^2-px-q=m^2-(x+n)^2$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-px-q}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{m^2-(x+n)^2}}dx=\arcsin\frac{x+n}{m}+C .$$

דוגמא

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-4x-3}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{1^2-(x+2)^2}}dx=\arcsin(x+2)+C .$$

הצבות טריגונומטריות $x=a\sin t, x=a\cos t$

כאשר נתון אינטגרל מהצורה $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$ ניתן להשתמש בהצבה $x=a\sin t$ או $x=a\cos t$.

תרגיל

הראה ש $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a}+c$.

פתרון

נציב $x = a\sin t$ ואז $dx = a\cos t dt$ ו $\sin t = \frac{x}{a} \Leftarrow t = \arcsin\frac{x}{a}$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}dt = \int \frac{a\cos t}{a\sqrt{1-\sin^2 t}}dt = \int \frac{a\cos t}{a\cos t}dt = \int 1dt = t = \arcsin\frac{x}{a}$$

אינטגרלים מהצורה $\sin ax\cos bx, \sin ax\sin bx, \cos ax\cos bx$.

נשתמש בזהויות:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)+\cos\left(\alpha+\beta\right)\right)$$

דוגמא

$$\int \sin 3x\cos 7x dx = \frac{1}{2}\int\left(\sin 10x - \sin 4x\right)dx = -\frac{1}{20}\cos 10x + \frac{1}{8}\cos 4x + C$$

אינטגרלים מהצורה $\sin^n x\cos^m x$

נראה שיטה לחשב אינטגרלים מהצורה $\sin^n x\cos^m x$ כאשר m,n שלמים ולפחות אחד מהם אי זוגי.

אם m אי זוגי נציב $t = \sin x$ ואז $dt = \cos x dx$.

$$\int \sin^n x\cos^m x dx = \int \sin^n x\cos^{m-1} x\cos x dx = \int \sin^n x\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{m-1}{2}}\cos x dx = \int t^n\left(1-t\right)^{\frac{m-1}{2}}dt$$

כל שנותר לחשב אינטגרל של פולינום.

אם n אי זוגי נציב $t = \cos x$ ואז $dt = -\sin x dx$

$$\int \sin^n x\cos^m x dx = -\int -\sin^{n-1} x\cos^m x\sin x dx = -\int -\left(1-\cos^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}}\cos^m x\sin x dx = -\int\left(1-t\right)^{\frac{n-1}{2}}t^m dt$$

כל שנותר לחשב אינטגרל של פולינום.

תרגיל

חשב את $\int \sin^4 x\cos^3 x dx$.

פתרון

נציב $t = \sin x$ ואז $dt = \cos x dx$

$$\int \sin^4 x\cos^3 x dx = \int \sin^4 x\cos^2 x\cos x dx = \int \sin^4 x\left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx =$$

$$= \int t^4\left(1-t^2\right)dt = \int\left(t^4-t^6\right)dt = \frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+c = \frac{\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}+c$$

אם m,n מספרים אי שליליים זוגיים נשתמש בזהויות

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

כדי להוריד את גודל החזקה.

תרגיל

חשב את $\int \cos^4 x\sin^2 x dx$.

פתרון

$$\int \cos^4 x\sin^2 x dx = \int \cos^2 x\sin^2 x\cos^2 x dx = \int \frac{\sin^2 2x}{4}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{8}\left[\int \sin^2 2x + \sin^2 2x\cos 2x dx\right]$$

נחשב את האינטגרל עבור המחובר הראשון

$$\int \sin^2 2x dx = \int \frac{1-\cos 4x}{2}dx = \frac{x}{2}-\frac{\sin 4x}{8}$$

נחשב את האינטגרל עבור המחובר השני

$\int \sin^2 2x\cos 2x dx$ נציב $t=\sin 2x$ ונקבל $dt = 2\cos 2x dx$

$$\int \sin^2 2x\cos 2x dx = \frac{1}{2}\int 2\sin^2 2x\cos 2x dx = \frac{1}{2}\int t^2 dt = \frac{t^3}{6} = \frac{\sin^3 2x}{6}.$$

נציב חזרה את התוצאות האחרונות ונקבל את האינטגרל

$$\int \cos^4 x\sin^2 x dx = \frac{1}{8}\left[\int \sin^2 2x + \sin^2 2x\cos 2x dx\right] = \frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+c.$$

<u>הצב טריגונומטרית אוניברסאלית $t=\tan\frac{x}{2}$.</u>

נציב $t=\tan\frac{x}{2}$.

נרשום את $\sin x$ באמצעות t.

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\cancel{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\cancel{\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}$$

נרשום את $\cos x$ באמצעות t

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}-1 = 2\cdot\frac{1}{\tan^2\frac{x}{2}+1}-1 = \frac{2}{t^2+1}-1 = \frac{1-t^2}{t^2+1}.$$

נרשום את $\tan x$ באמצעות t

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{t^2+1}{1-t^2} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

נשים לב ש $t=\tan\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2}=\arctan t \Rightarrow x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

<u>תרגיל</u>

חשב בעזרת הצבה טריגונומטרית אוניברסאלית $\int \frac{dx}{\sin x}$.

<u>פתרון</u>

נשתמש בהצבה $t=\tan\frac{x}{2}$ ואז $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

נציב את הערכים הנ"ל ונקבל

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\cdot\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|.$$