פתרון תרגיל בית 1

שאלה 1

נגדיר $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ הראה כי f גזירה ב 0 וחשב $f'(0)$.

תשובה: נחשב לפי הגדרת הנגזרת:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{sin(h)}{h}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{sin(h)-h}{h^2} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{cos(h)-1}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{-sin(h)}{2} = -\frac{0}{2} = 0$$

כאשר השתמשנו פעמיים בכלל לופיטל עבור גבול מהצורה " $\frac{0}{0}$ ".

הגבול קיים ושווה ל-0, לכן לפי ההגדרה, f גזירה ב-0 ו-f'(0) = 0.

שאלה 2

נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת באופן הבא:

$$f(x)=\begin{cases}(x+3)^4\sin\frac{1}{(x+3)^5} & x\neq -3\\ 0 & x=-3\end{cases}$$

א. הוכיחו שהפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה $x=-3$.

ב. חשבו את $f'(-3)$.

תשובה: נראה שהגבול בנקודה שווה לערך בנקודה:

$$\lim_{x\to -3}f(x) = \lim_{x\to -3}(x+3)^4 sin\frac{1}{(x+3)^5} = 0 = f(-3)$$

מכיוון שהפונקציה $(x+3)^4$ שואפת ל-0 כש- $x\to -3$ והפונקציה $sin\frac{1}{(x+3)^5}$ חסומה.

שאלה 3

מצא a ו- b כך שהפונקציה $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\geq 2 \\ ax^2+bx+1, & x<2 \end{cases}$ תהייה רציפה וגזירה לכל $x\in\mathbb{R}$.

תשובה: כדי ש-f תהיה רציפה, צריך שהגבולות החד-צדדיים יהיו קיימים ושווים לערך בנקודה, כלומר: $f(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} = \lim\limits_{x\to 2^+} \mathrm{f(x)}$. בשאר הנקודות היא רציפה כי היא אלמנטרית. נשים לב שקודם לא היינו צריכים לבדוק גבולות חד צדדיים אלא פשוט גבול כי הפונקציה היתה מוגדרת בצורה זהה משני הצדדים, אך כאן זה לא המצב ולכן צריך. מכיוון שהפונקציה רציפה בשני חלקיה, נוכל להציב ולקבל את המשוואה:

$$a\cdot 2^2 + b\cdot 2+1 = e^2 \Leftarrow 4a+2b+1 = e^2.$$

כדי ש-f תהיה גזירה, צריך שהנגזרות החד-צדדיות ב-2 יהיו קיימות ושוות. בשאר הנקודות היא גזירה כי היא אלמנטרית. הנגזרות החד-צדדיות קיימות כי בכל חלק הפונקציה אלמנטרית. נבדוק מתי הן שוות:

כש - $x \geq 2$, הנגזרת היא e^x ולכן $f'_+(2) = e^2$.

כש - $x < 2$, הנגזרת היא $2ax + b$ ולכן $f'_-(2) = 4a + b$.

נקבל את המשוואה: $4a + b = e^2$. יחד עם המשוואה הקודמת, נסיק כי:

$b = -1, a = \frac{e^2+1}{4}$.

שאלה 4

האם הפונקציה $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+3}$ רציפה במידה שווה ב $\mathbb{R}$?

תשובה: כן. נחשב את הנגזרת:

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x+3)-(e^x-1)e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{e^x((e^x+3)-(e^x-1))}{(e^x+3)^2} = \frac{4e^x}{(e^x+3)^2}$$

מצד אחד, המונה והמכנה חיוביים לכל x, לכן $f'(x) > 0$.

מצד שני, $\frac{e^x}{(e^x+3)^2} < 1$ (וקטן במהירות) ולכן $f'(x) < 4$.

מכאן שהנגזרת חסומה, ולפי משפט, נובע מכך ש-f רציפה במ"ש בכל R.