

פתרון תרגיל 3 – חדו"א 2

שאלה 3

הוכיחו כי לכל  $0 < x < 1$  מתקיים  $\arctan x > \ln(1+x)$ .  
הוכחה:

נגדיר  $f(x) = \arctan x$  ו-  $g(x) = \ln(1+x)$ .

שתי הפונקציות רציפות בקטע  $[0, x]$  כאשר  $0 < x < 1$  וגזירות בקטע הפתוח ולכן לפי משפט קושי קיימת נקודה

$$\text{כך ש- } 0 < c < x < 1, \quad \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\frac{\arctan x}{\ln(1+x)} = \frac{1+c}{1+c^2}$$

אבל

$$0 < c < 1$$

$$c^2 < c$$

$$1 + c^2 < 1 + c$$

$$\frac{1+c}{1+c^2} > 1$$

ולכן

$$\frac{\arctan x}{\ln(1+x)} > 1$$

$$\forall 0 < x < 1 \quad \arctan x > \ln(1+x) \Leftarrow$$