פתרון תרגיל בית 2

שאלה 1

הראו כי למשוואה $x\cdot\sin x + \cos x = x^2$ יש פתרון יחיד בקרן $[0,\infty)$.

תשובה: נגדיר פונקציה: $f(x) = x\cdot\sin x + \cos x - x^2$.

כיוון ש - $f(0) = 1 > 0$ ו - $f(\pi) = -1-\pi^2 < 0$, לפי משפט ערך הביניים, קיים

פתרון בקטע $(0,\pi)$ ובפרט בקרן $[0,\infty)$. נחשב את הנגזרת ונבדוק מתי מתאפסת:

$f'(x) = \sin x + x\cos x - \sin x - 2x = x\cos x - 2x = 0 \Longrightarrow x\cos x = 2x$

$\Longrightarrow \cos x = 2$ או $x = 0$. כידוע, $\cos x$ אף פעם לא שווה 2, לכן הנגזרת מתאפסת רק

כש- $x = 0$. נניח בשלילה שיש שני פתרונות שונים x_1,x_2 בקרן $[0,\infty)$.

f רציפה בקטע הסגור $[x_1,x_2]$ וגזירה בקטע הפתוח (x_1,x_2), לכן לפי משפט רול,

אם $f(x_1) = f(x_2)$ (ושניהם שווים כי שווים ל-0 לפי ההנחה), אז קיימת נק' $c \in (x_1,x_2)$

כך ש- $f'(c) = 0$. אך ראינו שהנגזרת מתאפסת רק בנק' 0 שאינה בקטע, סתירה.

לכן יש למשוואה רק פתרון אחד.

שאלה 2

מצאו את הנקודה/נקודות c ממשפט לגרנז' עבור:

א. $f(x)=x^2$ ב $[0,3]$. ב. $f(x)=\frac{1}{x}$ ב $[1,2]$. ג. $f(x)=x^3$ ב $[-1,1]$.

תשובה: משפט לגרנז' (שתנאיו מתקיימים עבור הפונקציות האלמטריות הנ"ל)

מבטיח קיומה של נק' $c \in (a,b)$ כך ש - $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ כאשר a,b הם קצות

הקטעים. נגזור את הפונקציות ונציב במשוואה זו את קצוות הקטעים בכל אחד

מהסעיפים.

א. $f'(c) = \frac{3^2-0^2}{3-0} = 3 \Longrightarrow 2c = \frac{9-0}{3} \Longrightarrow c = 1.5 \Longrightarrow$ הנק': (1.5,2.25).

ב. $f'(c)=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{1}}{2-1} \Leftarrow -\frac{1}{2} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{c^2} \Leftarrow c^2=2 \Leftarrow \sqrt{2} = c$ $(-\sqrt{2}$ לא בקטע).

$\Leftarrow$ הנק': $(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}})$.

ג. $f'(c)=\frac{1^3-(-1^3)}{1-(-1)} \Leftarrow 1 = \frac{1-(-1)}{1+1} = 3c^2 \Leftarrow c=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Leftarrow$ הנק': $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{3\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{3\sqrt{3}})$.

שאלה 3

הוכיחו כי לכל $0<x<1$ מתקיים $\arctan x>\ln(1+x)$.

הוכחה:

נגדיר $f(x)=\arctan x$ ו- $g(x)=\ln(1+x)$.

שתי הפונקציות רציפות בקטע $[0,x]$ כאשר $0<x<1$ וגזירות בקטע הפתוח ולכן לפי משפט קושי קיימת נקודה

$0<c<x<1$ כך ש- $\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$, ז"א

$$\frac{\arctan x}{\ln(1+x)}=\frac{1+c}{1+c^2},$$

אבל

$$0<c<1$$
$$c^2<c$$
$$1+c^2<1+c$$
$$\frac{1+c}{1+c^2}>1$$

ולכן

$$\frac{\arctan x}{\ln(1+x)}>1$$

$$\Leftarrow \arctan x>\ln(1+x) \quad \forall\, 0<x<1$$

שאלה 4

חשבו את הגבולות הבאים בעזרת כלל לופיטל:

א. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}$. זה גבול מהצורה "$\frac{\infty}{\infty}$", וכזה נקבל בכל שלב, לכן נשתמש בכלל לופיטל שוב ושוב:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{(n-1)nx^{n-2}}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n!\,x^0}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n!}=\infty$$

רואים מכאן שפונקציה אקספוננציאלית גדלה מהר יותר מפונקציה פולינומיאלית.

ב. $\lim_{x\to 0} x\cdot ln(x)$. זה גבול מהצורה "$(-\infty)\cdot 0$", לכן נהפוך את הביטוי לשבר

ונשתמש בכלל לופיטל: $\lim_{x\to 0}\frac{lnx}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}-x=0$.

ג. $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{ln(x^{\frac{1}{x}})}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{lnx}{x}}$.

כאשר השתמשנו בכלל לופיטל על גבול מהצורה "∞^0".

נחשב בנפרד ע"י לופיטל ("$\frac{\infty}{\infty}$"): $\lim_{x\to\infty}\frac{lnx}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

לכן: $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{lnx}{x}}=e^0=1$.

ב. $\lim_{x\to\infty}e^x\cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)$. זה גבול מהצורה "$\infty\cdot 0$", לכן נהפוך את הביטוי לשבר

ונשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x\to\infty}e^x\cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{sin\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}cos\left(\frac{1}{x}\right)}{-e^{-x}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}\cdot\lim_{x\to\infty}cos\left(\frac{1}{x}\right)=\text{"}\infty\cdot 1\text{"}=\infty$$

כאשר השתמשנו בסעיף א' לחישוב הגבול השמאלי (לופיטל פעמיים)

ובכך ש - cos(0) = 1 לחישוב הגבול הימני.

ג. $\lim_{x\to 1}(2-x)^{tan(\frac{\pi}{2}x)}$.

נסמן: $y=(2-x)^{tan\frac{\pi}{2}x}$. אז:

$$\ln y=\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ln(2-x)$$

$$\lim_{x\to1}\ln y=\lim_{x\to1}\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ln(2-x)\overset{\infty\cdot0}{=}\lim_{x\to1}\frac{\ln(2-x)}{\cot\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1}\frac{\frac{-1}{(2-x)}}{\frac{1}{-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2-x}=\frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}=e^{2/\pi}$$

ו. הסבירו מדוע שימוש בכלל לופיטל אינו פותר את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5cos(4x)}{x-sin(x)}$.

הגבול מהצורה "$\frac{\infty}{\infty}$", לכן ננסה להשתמש בכלל לופיטל. נגזור את המונה ואת המכנה ונקבל שהגבול שווה ל - $\lim_{x\to\infty}\frac{3-5sin(4x)\cdot4}{1-cos(x)}$, אך גבול זה אינו קיים. לכן לא ניתן להשתמש בכלל לופיטל (לא רק טכנית, תנאי המשפט אינם מתקיימים).

בהצלחה!