

## תרגול 1

### רציפות של פונקציה

#### הגדרה

תהי  $f(x)$  פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה  $x = x_0$ . נאמר כי  $f(x)$  רציפה בנקודה  $x = x_0$  אם מתמלאים שני התנאים:

א. קיים הגבול  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

ב.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

נאמר שפונקציה  $f(x)$  רציפה בקטע  $I$  אם היא רציפה בכל נקודה בקטע.

#### הערה

כל הפונקציות האלמנטריות רציפות בתחום הגדרתן.

### משפט ערך הביניים

תהא  $f$  רציפה ב  $[a, b]$ , ונניח ש  $f(a) < 0, f(b) > 0$  (או להפך) אז קיימת נקודה  $a < c < b$  כך ש  $f(c) = 0$ .

### תרגיל 1

הוכיחו כי למשוואה  $x = 2 + \arctan x$  יש לפחות פתרון ממשי אחד.

#### פתרון

נוכיח שלפונקציה  $f(x) = 2 + \arctan x - x$  יש נקודת חיתוך אחת עם ציר  $x$ .

$$f(0) = 2$$

לכל  $x$  ממשי  $2 < \frac{\pi}{2} < \arctan x < 2$  ולכן  $\arctan 4 < 2$ .

$$f(4) = \arctan 4 - 2 < 0$$

הפונקציה  $f(x) = 2 + \arctan x - x$  רציפה, ולכן על פי משפט ערך הביניים קיים  $c \in (0, 2)$  כך ש  $f(c) = 0$ . מסקנה: יש לפחות פתרון ממשי אחד למשוואה.

### תרגיל 2

מיינ את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות:

$$א. f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^4} \quad ב. f(x) = \frac{x+2}{x^3+8} \quad ג. f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2} \quad ד. f(x) = \frac{4}{\frac{1}{3^{x-5}} + 2}$$

#### פתרון

#### סעיף א

נקודת אי הרציפות היא  $x = -1$ . מכיון ש  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{(1+x)^4} = +\infty$  נקודת האי רציפות היא מסוג שני.

## סעיף ב

נקודת אי הרציפות היא  $x = -2$ .

$$\text{ואז } f(x) = \frac{x+2}{x^3+8} \Rightarrow f(x) = \frac{x+2}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x^2-2x+4} = \frac{1}{12}$$

נקודת האי רציפות היא סליקה.

## סעיף ג

נקודת אי הרציפות היא  $x = 0$

$$\cdot f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2 \cdot (1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2 \cdot (1+\cos x)}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ נשתמש בגבול}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1}{2}$$

נקודת האי רציפות היא סליקה.

## סעיף ד

נקודת אי הרציפות היא  $x = 5$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{4}{\frac{1}{3^{x-5}} + 2} = 0 \text{ ואז } \lim_{x \rightarrow 5^+} 3^{\frac{1}{x-5}} = +\infty \text{ ולכן } \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{x-5} = +\infty$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 5^+} \left( \frac{4}{\frac{1}{3^{x-5}} + 2} + 8 \right) = 8 \text{ סה"כ נקבל ש}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{4}{\frac{1}{3^{x-5}} + 2} = 2 \text{ ואז } \lim_{x \rightarrow 5^+} 3^{\frac{1}{x-5}} = 0 \text{ ולכן } \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{x-5} = -\infty$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 5^-} \left( \frac{4}{\frac{1}{3^{x-5}} + 2} + 8 \right) = 10 \text{ סה"כ נקבל ש}$$

הגבולות החד צדדים קיימים אבל שונים ולכן נקודת אי הרציפות היא מסוג ראשון.