תרגול 2

שאלה 1

נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} cos^2x\cdot sin\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x} & x\neq\frac{\pi}{2} \\ 0 & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

א. האם $f(x)$ רציפה ב $x=\frac{\pi}{2}$? נמקו!

ב. חשבו את $f'(x)$ בנקודות בהן היא קיימת.

פתרון שאלה 1

סעיף א

אפיסה כפול חסומה שווה לאפיסה.

הפונקציה $sin\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}$ חסומה. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}cos^2x=0$.

סה"כ נקבל $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}cos^2x\cdot sin\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}=0 \Leftarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=0=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

מהגדרת רציפות בנקודה הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x=\frac{\pi}{2}$.

סעיף ב

עבור $x\neq\frac{\pi}{2}$

$$f(x)=cos^2x\cdot sin\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}$$

$$f'(x)=-2cosx\cdot sinx\cdot sin\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}+cos^2x\cdot\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}\cdot cos\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}$$

$$f'(x)=-sin(2x)\cdot sin\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}+\frac{cos^2x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}\cdot cos\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}$$

עבור $x=\frac{\pi}{2}$ ניעזר בהגדרת הנגזרת

$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{cos^2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\cdot sin\frac{1}{-h}}{h}$$

נחשב את הגבול $\lim\limits_{h\to0}\frac{cos^2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{sin^2h}{h}=0$

אפיסה כפול חסומה שווה לאפיסה.

הפונקציה $sin\frac{1}{-h}$ חסומה. הגבול שווה ל 0

$$f'(x)=\begin{cases}-sin(2x)\cdot sin\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}+\frac{cos^2x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}\cdot cos\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}, & x\neq\frac{\pi}{2}\\ 0, & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

שאלה 2

א. תהיי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(x)=\begin{cases}1+\ln x & 1<x\\ 2x^2-ax+b & 1\geq x\end{cases}$.
מצא a,b כך ש $f\left(x\right)$ תהייה גזירה ורציפה עבור כל $x>0$.

ב. מצא משיק לפונקציה $f\left(x\right)=x^3-x^2-2$ בנקודה בה $x=-1$. מצא משיק נוסף המקביל לו.

פתרון שאלה 2

סעיף א

תחילה נרצה שהפונקציה $f\left(x\right)$ תהייה רציפה. $\lim\limits_{x\to1^+} f\left(x\right)=1, \lim\limits_{x\to1^-} f\left(x\right)=2-a+b$.

כדי שהפונקציה תהייה גזירה נבדוק שהנגזרות החד צדדיות בנקודה $x=1$ תהיינה שוות.

עבור $x>1$ נקבל ש $f'\left(x\right)=\frac{1}{x}$ ולכן $f_+'(1)=1$.

עבור $x<1$ נקבל ש $f'\left(x\right)=4x-a$ ולכן $f_-'(1)=4-a$.

נקבל ש $\begin{cases}4-a=1\\2-a+b=1\end{cases}$ מפתרון מערכת המשוואות נקבל $a=3,b=2$.

סעיף ב

נקודת ההשקה היא $(-1,-4)$.

נמצא את שיפוע המשיר בנקודה $(-1,-4)$.

$f'\left(x\right)=3x^2-2x \Rightarrow f'\left(-1\right)=5$ ומשוואת המשיק היא $y=5x+1$.

השיפוע של ישר המקביל למשיק הנ"ל הוא 5 ולכן יש למצוא ערך של x שעבורו $f'\left(x\right)=5$.

נפתור את המשוואה $f'\left(x\right)=3x^2-2x$

$$3x^2-2x=5 \Leftarrow 3x^2-2x-5=0 \Leftarrow (3x-5)(x+1)=0.$$

עבור $x=-1$ מצאנו את משוואת המשיק. נמצא את משוואת המשיק עבור $x=\frac{5}{3}$.

$f\left(\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{5}{3}\right)^3-\left(\frac{5}{3}\right)^2-2=-\frac{4}{27}$ ולכן נקודת ההשקה $\left(\frac{5}{3},-\frac{4}{27}\right)$.

משוואת המשיק $y+\frac{4}{27}=5\left(x-\frac{5}{3}\right) \Leftarrow y=5x-\frac{229}{27}$.