<u>תרגול 3</u>

<u>תרגיל 1</u>

חשבו את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = (arctanx)^x$.

<u>פתרון</u>

<u>תרגיל 2</u>

הוכיחו כי לכל x ממשי מתקיים $\sin x \geq x - \frac{x^2}{2}$.

נמקו בפרוט את צעדיכם!

<u>פתרון</u>

נוכיח שהפונקציה $f\left(x\right) = \sin x - x + \frac{x^2}{2}$ אי שלילית לכל x ממשי.

נשים לב ש $f\left(0\right) = 0$. יש להוכיח שהנקודה $\left(0,0\right)$ היא נקודת מינימום מוחלט.

$f'\left(x\right) = \cos x - 1 + x$ נשים לב ש $f'\left(0\right) = 0$.

$f''\left(x\right) = -\sin x + 1$ הנגזרת השנייה חיובית פרט לנקודות מבודדות שבהן היא מתאפסת, כלומר הנגזרת הראשונה עולה לכל x ממשי.

$f'\left(0\right) = 0$ היא הנקודה היחידה שבה הנגזרת מתאפסת ובנקודה זו היא "עוברת" משליליות לחיוביות ז"א מדובר בנקודת מינימום יחידה. הפונקציה רציפה לכל x ולכן סה"כ $\left(0,0\right)$ נקודת המינימום היחידה היא גם נקודת מינימום מוחלט כדרוש.

<u>תרגיל 3</u>

חקור באופן מלא את הפונקציה $y = \frac{x}{\sqrt{|x| - 5}}$ וצייר את סקיצת הגרף שלה.

(תחום הגדרה, זוגיות ואי זוגיות, אסימפטוטות, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון)

<u>פתרון</u>

<u>סעיף א</u>

תחום הגדרה: $|x| - 5 > 0 \Leftarrow x < -5 \vee 5 < x$.

הפונקציה אי זוגית: $y(-x) = \frac{-x}{\sqrt{|-x| - 5}} = -\frac{x}{\sqrt{|x| - 5}} = -y(x)$.

אסימפטוטות:

אסימפטוטות אנכיות: $\lim_{x \to -5^-} \frac{x}{\sqrt{|x| - 5}} = -\infty, \lim_{x \to 5^+} \frac{x}{\sqrt{|x| - 5}} = +\infty$ ולכן $x = 5, x = -5$ אסימפטוטות אנכיות של הפונקציה.

אסימפטוטות משופעות

תהיי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בקטע $\left(a, \infty\right)$. אם קיימים הגבולות

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f\left(x\right)}{x}, b = \lim_{x \to \infty} \left[f\left(x\right) - ax\right]$$

אז הישר $y = ax+b$ הוא האסימפטוטה המשופעת היחידה ב $+\infty$ של $f\left(x\right)$.

תהיי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בקטע $\left(-\infty, c\right)$. אם קיימים הגבולות

$$a = \lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}, b = \lim_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-ax\right]$$

אז הישר $y = ax+b$ הוא האסימפטוטה המשופעת היחידה ב $-\infty$ של $f\left(x\right)$.

נבדוק מה היא האסימפטוטה המשופעת ב $+\infty$

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{|x|-5}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{|x|-5}} = 0$$

ולכן אין אסימפטוטה משופעת ב $+\infty$.

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right] = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{|x|-5}} = +\infty$$

נבדוק מה היא האסימפטוטה המשופעת ב $-\infty$

$$a = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x\sqrt{|x|-5}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{|x|-5}} = 0$$

ולכן אין אסימפטוטה משופעת ב $-\infty$.

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right] = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{|x|-5}} = -\infty$$

תחומי עלייה וירידה:

מכיוון שהפונקציה אי זוגית מספיק לבדוק תחומי עליה וירידה של הפונקציה עבור $0 < x$ ואז להסיק עבור כל תחום ההגדרה. מכיוון שתחום ההגדרה הוא $x < -5 \vee 5 < x$ נבדוק עבור $5 < x$.

כאשר $5 < x$ נקבל ש $|x| = x$.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-5}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x-5}-\frac{x}{2\sqrt{x-5}}}{x-5} \Rightarrow f'(x) = \frac{x-10}{2(x-5)^{\frac{3}{2}}}$$.

נשווה את הנגזרת לאפס ונקבל $x = 10$.

נבדוק תחומי עליה וירידה בתחום $5 < x$

x	5	$< x <$	10	$< x$
$f(x)$		יורד		עולה
$f'(x)$		שלילי		חיובי

מכיוון שהפונקציה אי זוגית נקבל

תחומי עליה: $x < -10 \vee 10 < x$. תחומי ירידה $5 < x < 10 \vee -10 < x < -5$.

נקודות קיצון:

מהטבלה בסעיף הקודם נקבל ש $\left(10, 2\sqrt{5}\right)$ היא נקודת מינימום ומכיוון שהפונקציה אי זוגית ניתן להסיק ש $\left(10, -2\sqrt{5}\right)$ היא נקודת מקסימום.

שרטוט: