תרגול 4

שימוש במשפט רול

תרגיל ממבחן (מועד א סמסטר א 2009)

כמה פתרונות יש למשוואה $x^5-5x^4+5x^3+10=0$.

פתרון

נתבונן בפונקציה $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+10$.

$f'(x)=5x^4-20x^3+15x^2=5x^2(x^2-4x+3)=5x^2(x-3)(x-1)$.

הנקודות שהנגזרת מתאפסת הם $0,1,3$.

ממשפט רול נקבל שבכל אחד מהקטעים $(\infty,0],[0,1],[1,3],[3,\infty)$ יש לכל היותר פתרון אחד.

על פי משפט ערך הביניים נוכל לדעת האם יש פתרון בכל אחד מהקטעים הנ"ל.

נתבונן בקטע $(-\infty,0]$

$f(0)=10, f(-10)<0$ ולכן יש פתרון אחד בקטע $(-\infty,0]$.

נתבונן בקטע $[0,1]$

$f(0)=1, f(1)=11$ ולכן אין פתרון בקטע $[0,1]$.

נתבונן בקטע $[1,3]$

$f(1)=11, f(3)=-17$ ולכן יש פתרון אחד בקטע $[1,3]$.

נתבונן בקטע $[3,\infty)$

$f(3)=-17, f(10)>0$ ולכן יש פתרון אחד בקטע $[3,\infty)$.

סה"כ נקבל שלושה פתרונות למשוואה.

שימוש במשפט – ערך הממוצע של לגראנג'

תרגיל

הוכיחו כי לכל $0<a<b$ מתקיים : $1-\frac{a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b}{a}-1$.

נמקו בפירוט את צעדיכם.

פתרון

מספיק להראות ש $\frac{b-a}{b}<\ln b-\ln a<\frac{b-a}{a}$.

נעזר בפונקציה - $f(x)=\ln x$

הפונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b) .

על פי משפט ערך הממוצע של לגרנג' קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

$f(x)=\ln x \leftarrow f'(x)=\frac{1}{x}$. סה"כ נקבל שקיימת נקודה $a<c<b$ המקיימת: $\frac{1}{c}=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$.

$a<c<b$ ולכן מתקיים $\frac{1}{b}<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}$ ויחד עם השוויון $\frac{1}{c}=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$ נקבל

$\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a}$. נתון ש $0 < a < b$ ולכן $b-a > 0$ וניתן להכפיל פי $b-a$ ז"א

$$\frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}$$

<u>שימוש במשפט – ערך הממוצע של קושי</u>

הוכיחו שלכל $0 < b < 1$ מתקיים: $\frac{\sqrt{1-b^2}}{1+b^2} < \frac{arctanb}{arcsinb} < 1$

<u>פתרון</u>

נסמן: $f(x) = arctanx, g(x) = arcsinx$.

לכל $0 < b < 1$ הפונקציות $f(x), g(x)$ רציפות בקטע הסגור $[0,b]$ וגזירות בקטע הפתוח $(0,b)$.

$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ז"א הנגזרת לא מתאפסת בקטע $(0,b)$.

על פי משפט ערך הממוצע המוכלל קיימת נקודה c בקטע $(0,b)$ כך ש

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(0)}{g(b)-g(0)} = \frac{arctanb}{arcsinb}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{\sqrt{1-c^2}}{1+c^2}$$

סה"כ קיבלנו שלכל $0 < b < 1$ קיימת נקודה c בקטע $(0,b)$ כך ש

$$\frac{\sqrt{1-c^2}}{1+c^2} = \frac{arctanb}{arcsinb}$$

לכל c בקטע $(0,b)$ $\quad 1 < 1 + c^2$, $0 < \sqrt{1-c^2} < 1$ ז"א $\frac{arctanb}{arcsinb} = \frac{\sqrt{1-c^2}}{1+c^2} < 1$

נתבונן בפונקציה $h(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$.

$$h'(x) = \frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(1+x^2) - 2x\cdot\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)^2} = \frac{-x\cdot(1+x^2) - 2x\cdot(1-x^2)}{(1+x^2)^2\cdot\sqrt{1-x^2}} = \frac{-3x+x^3}{(1+x^2)^2\cdot\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x(3-x^2)}{(1+x^2)^2\cdot\sqrt{1-x^2}}$$

לכל x בקטע $(0,b)$ הנגזרת שלילית והפונקציה $h(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$ יורדת בקטע $(0,b)$.

לכל c בקטע $(0,b)$ מתקיים $c < b$ ואז $h(b) < h(c)$.

$$\frac{\sqrt{1-b^2}}{1+b^2} < \frac{\sqrt{1-c^2}}{1+c^2} = \frac{arctanb}{arcsinb}$$

מסקנה: $\frac{\sqrt{1-b^2}}{1+b^2} < \frac{arctanb}{arcsinb} < 1$

<u>חישוב גבול בעזרת משפט לופיטל</u>

באופן כללי משפט לופיטל עוזר למצוא את הגבולות עבור המקרים $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

עבור $0\cdot\infty$ גם ניתן להשתמש בכלל לופיטל מכיוון ש $\frac{\infty}{\infty}=\frac{\infty}{1/0}=0\cdot\infty$.

עבור 1^{∞} גם ניתן להשתמש בלופיטל ע"י חישוב הגבול $\frac{\infty}{\infty}=\frac{\infty}{1/\ln 1}=\infty\cdot\ln 1\Rightarrow e^{\ln 1^{\infty}}$.

ובאותו אופן ניתן לחשב את 0^{0}.

<u>תרגיל ממבחן סמסטר א מועד ב 2009</u>

חשב: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

<u>פתרון</u>

נשים לב שקיבלנו 0^{0} ולכן נחשב את הגבול $\lim_{x\to\infty}e^{ln\left(\frac{ln\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ln\left(\frac{ln\,x}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\cdot x-1\cdot ln\,x\right)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x}{ln\,x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot x-1\cdot ln\,x\right)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x}{ln\,x}$$
$$=\frac{1-ln\,x}{x\,ln\,x}=0$$

ואז $e^{0}=1$.

<u>תרגיל ממבחן סמסטר א מועד א 2012</u>

חשב: $\lim_{x\to0}\frac{e^{e^{x}}-e^{x+1}}{x^{2}}$.

<u>פתרון</u>

שוב כל התנאים של משפט לופיטל מתקיימים ולכן

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{e^{x}}-e^{x+1}}{x^{2}}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x}e^{e^{x}}-e^{x+1}}{2x}=\lim_{x\to0}e^{x}\lim_{x\to0}\frac{e^{e^{x}}-e}{2x}=\lim_{x\to0}e^{x}\lim_{x\to0}\frac{e^{x}e^{e^{x}}}{2}=\frac{e}{2}.$$

<u>תרגיל ממבחן סמסטר א מועד ב 2012</u>

חשב: $\lim_{x\to0}\frac{xe^{\sin x}-\ln(1+x)}{x^{2}}$.

<u>פתרון</u>

$$\lim_{x\to0}\frac{xe^{\sin x}-\ln(1+x)}{x^{2}}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}+x\cos xe^{\sin x}-\frac{1}{1+x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}e^{\sin x}\lim_{x\to0}\frac{1+x\cos x-\frac{e^{-\sin x}}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to0}e^{\sin x}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\frac{-\cos xe^{-\sin x}(1+x)-e^{-\sin x}}{(1+x)^{2}}}{2}=1.5$$