## תרגול 6

### שאלה 1

חשב בעזרת אינטגרציה בחלקים את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \arctan x dx$ ב. $\int \ln x dx$ ג. $\int e^x \cos x dx$ .

### פתרון

א.

נסמן $\begin{matrix} u = \arctan x \\ v' = 1 \end{matrix}$ ואז $\begin{matrix} u' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v = x \end{matrix}$ .

נשתמש בנוסחה $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$ ונקבל

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx .$$

נשאר לנו לפתור את האינטגרל הבא $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ .

נבחר בהצבה $t = x^2$ ואז $dt = 2xdx$ .

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2}\ln|1+t| = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) .$$

ב.

נסמן $\begin{matrix} u = \ln x \\ v' = 1 \end{matrix}$ ואז $\begin{matrix} u' = \dfrac{1}{x} \\ v = x \end{matrix}$ .

נשתמש בנוסחה $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$ ונקבל

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + c .$$

ג.

נסמן $\begin{matrix} u = e^x \\ v' = \cos x \end{matrix}$ ואז $\begin{matrix} u' = e^x \\ v = \sin x \end{matrix}$ .

נשתמש בנוסחה $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$ ונקבל

$$(1) \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx .$$

נשאר לחשב את האינטגרל $\int e^x \sin xdx$.

נשתמש שוב באינטגרציה בחלקים

נסמן $\begin{matrix} u = e^x \\ v' = \sin x \end{matrix}$ ואז $\begin{matrix} u' = e^x \\ v = -\cos x \end{matrix}$.

$\int e^x \sin xdx = -e^x \cos x + \int e^x \cos xdx$. נציב במשוואה $(1)$ ונקבל

$$2\int e^x \cos xdx = e^x \sin x + e^x \cos x \Leftarrow \int e^x \cos xdx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos xdx$$

$$\int e^x \cos xdx = \frac{1}{2}e^x \sin x + \frac{1}{2}e^x \cos x$$

**<u>שאלה 2</u>**

רשום את צורת הפירוק לסכום של שברים אלמנטאריים (ז"א חזקת המונה קטנה מחזקת המכנה) של השבר האלגברי הנתון:

$$\frac{x^2 - x + 5}{x^2\left(x^2 + 4\right)}.$$

**<u>פתרון שאלה 2</u>**

$$\frac{x^2 - x + 5}{x^2\left(x^2 + 4\right)} = \frac{x^2}{x^2\left(x^2 + 4\right)} + \frac{-x + 5}{x^2\left(x^2 + 4\right)} = \frac{1}{x^2 + 4} + \frac{-x + 5}{x^2\left(x^2 + 4\right)}.$$

נשאר לרשום את $\frac{-x + 5}{x^2\left(x^2 + 4\right)}$ כסכום של שברים אלגבריים.

$$\frac{-x + 5}{x^2\left(x^2 + 4\right)} = \frac{Ax + B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$$

**<u>דרך 1 – עקרון הצבת המספרים</u>**

נציב במקום $x$ את המספרים $-2, -1, 1, 2$ נקבל ארבע משוואות ונוכל לחשב את $A, B, C, D$.

בד"כ כדאי להציב מספרים קטנים.

נציב $x = 1$ ונקבל

$$\frac{-1 + 5}{1^2\left(1^2 + 4\right)} = \frac{A + B}{1^2} + \frac{C + D}{1^2 + 4} \Rightarrow \frac{4}{5} = A + B + \frac{C}{5} + \frac{D}{5} \Rightarrow 4 = 5A + 5B + C + D$$

נציב $x = 2$ ונקבל

$$\frac{-2 + 5}{2^2\left(2^2 + 4\right)} = \frac{2A + B}{2^2} + \frac{2C + D}{2^2 + 4} \Rightarrow \frac{3}{32} = \frac{2A + B}{4} + \frac{2C + D}{8} \Rightarrow 3 = 16A + 8B + 8C + 4D$$

נציב $x=-1$ ונקבל

$$\frac{1+5}{1\cdot(1+4)}=\frac{-A+B}{1}+\frac{-C+D}{1+4}\Rightarrow\frac{6}{5}=-A+B+\frac{-C+D}{5}\Rightarrow 6=-5A+5B-C+D$$

נציב $x=-2$ ונקבל

$$\frac{2+5}{2^2\left(2^2+4\right)}=\frac{-2A+B}{2^2}+\frac{-2C+D}{2^2+4}\Rightarrow\frac{7}{32}=\frac{-2A+B}{4}+\frac{-2C+D}{8}\Rightarrow 7=-16A+8B-8C+4D$$

יש לפתור את מערכת המשוואות

$$A=-\frac{1}{4},B=\frac{5}{4},C=\frac{1}{4},D=-\frac{5}{4}\Leftarrow\begin{cases}5A+5B+C+D=4\\16A+8B+8C+4D=3\\-5A+5B-C+D=6\\-16A+8B-8C+4D=7\end{cases}$$

$$\frac{-x+5}{x^2\left(x^2+4\right)}=\frac{-x+5}{4x^2}+\frac{x-5}{4\left(x^2+4\right)}$$

סה"כ נקבל ש

$$\frac{x^2-x+5}{x^2\left(x^2+4\right)}=\frac{x^2}{x^2\left(x^2+4\right)}+\frac{-x+5}{x^2\left(x^2+4\right)}=\frac{1}{x^2+4}+\frac{-x+5}{4x^2}+\frac{x-5}{4\left(x^2+4\right)}=\frac{-x+5}{4x^2}+\frac{x-1}{4\left(x^2+4\right)}$$

**<u>דרך 2</u>**

מכנה משותף והשוואת מקדמים.

**<u>שאלה 3</u>**

חשב את האינטגרליים הבאים בעזרת השיטה לחישוב אינטגרל מהצורה $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$:

א. $\int\frac{x^2+3x}{x^2-9x+8}dx$.

ב. $\int\frac{x^3}{x^2+8x+17}dx$.

ג. $\int\frac{x^2+1}{x^2+4x+4}dx$.

**<u>פתרון שאלה 3</u>**

**<u>סעיף א</u>**

מכיוון שהחזקה של המונה שווה לחזקה של המכנה נבצע תחילה חלוקת פולינומים

$$\begin{array}{l|l}\overline{\phantom{xx}1\phantom{xx}} & \\ x^2+3x & x^2-9x+8\\ \underline{x^2-9x+8} & \\ 12x-8 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^2+3x}{x^2-9x+8}dx = \int\left(1+\frac{12x-8}{x^2-9x+8}\right)dx = \int 1dx + 6\int\frac{2x-9}{x^2-9x+8}dx + 46\int\frac{1}{x^2-9x+8}dx$$

נחשב את האינטגרל של כל אחד מהמחוברים:

$$\int 1dx = x$$

$$\int \frac{2x-9}{x^2-9x+8}dx = \ln\left|x^2-9x+8\right| = \ln\left(|x-1||x-8|\right) = \ln|x-1| + \ln|x-8|$$

$$\int \frac{1}{x^2-9x+8}dx = \int\frac{1}{(x-1)(x-8)}dx = \frac{1}{7}\int\frac{1}{x-8}dx - \frac{1}{7}\int\frac{1}{x-1}dx = \frac{1}{7}\ln|x-8| - \frac{1}{7}\ln|x-1|$$

סה"כ פתרון האינטגרל: $x+\frac{8}{7}\ln|x-8|+\frac{6}{7}\ln|x-1|+C$ .

**<u>סעיף ב</u>**

מכיוון שהחזקה הגבוהה של המונה גדולה מהחזקה הגבוהה של המכנה נבצע תחילה חלוקת פולינומים:

$$\begin{array}{r|l} x^2-8x & \\ \hline x^3 & x^2+8x+17 \\ \underline{x^3+8x^2+17x} & \\ -8x^2-17x & \\ \underline{-8x^2-64x-136} & \\ 47x+136 & \end{array}$$

$$\int\frac{x^3}{x^2+8x+17}dx = \int\left(x^2-8x+\frac{47x+136}{x^2+8x+17}\right)dx = \int\left(x^2-8x\right)dx + \frac{47}{2}\int\frac{2x+8}{x^2+8x+17}dx - \int\frac{52}{x^2+8x+17}dx$$

נחשב את האינטגרל של כל אחד מהמחוברים

$$\int\frac{2x+8}{x^2+8x+17}dx = \ln\left(x^2+8x+17\right) \quad , \int\left(x^2-8x\right)dx = \frac{x^3}{3}-4x^2$$

$$\int\frac{1}{x^2+8x+17}dx = \int\frac{1}{(x+4)^2+1}dx = \arctan(x+4)$$

סה"כ נקבל $\frac{x^3}{3}-4x^2+\frac{47}{2}\ln\left(x^2+8x+17\right)-52\arctan(x+4)+C$ .

**<u>סעיף ג</u>**

מכיוון שהחזקה הגבוהה של המונה שווה לחזקה הגבוהה של המכנה נבצע חלוקת פולינומים.

$$\begin{array}{r|l} 1 & \\ \hline x^2+1 & x^2+4x+4 \\ \underline{x^2+4x+4} & \\ -4x-3 & \end{array}$$

$$\int\left(\frac{x^2+1}{x^2+4x+4}\right)dx=\int\left(1-\frac{4x+3}{x^2+4x+4}\right)dx=\int 1dx-2\int\frac{2x+4}{x^2+4x+4}dx+5\int\frac{1}{(x+2)^2}dx$$
$$=x-2\ln\left(x^2+4x+4\right)-\frac{5}{x+2}$$

**<u>שאלה 4</u>**

חשב את האינטגרליים הבאים בעזרת השיטה לחישוב אינטגרל מהצרה $\frac{ax+b}{\sqrt{x^2+px+q}}$:

א. $\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx$.

ב. $\int\frac{6}{\sqrt{7-4x^2+4x}}dx$.

ג. $\int\frac{5}{\sqrt{x^2+4x+4}}dx$.

ד. $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+5x-6}}dx$.

**<u>פתרון שאלה 4</u>**

**<u>סעיף א</u>**

$$\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx=\int\frac{2x+6}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx-5\int\frac{1}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx.$$

נחשב את האינטגרל של כל אחד מהמחוברים $\int\frac{2x+6}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx=2\sqrt{x^2+6x+13}$.

נשתמש באינטגרל המידי $\int\frac{1}{\sqrt{(x+b)^2+a^2}}dx=\ln\left((x+b)+\sqrt{(x+b)^2+a^2}\right)$.

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{(x+3)^2+4}}dx=\ln\left((x+3)+\ln\sqrt{(x+3)^2+4}\right).$$

סה"כ התשובה: $2\sqrt{x^2+6x+13}+C-5\ln\left((x+3)+\ln\sqrt{(x+3)^2+4}\right)$.

**<u>סעיף ב</u>**

$$\int\frac{6}{\sqrt{7-4x^2+4x}}dx=6\int\frac{1}{\sqrt{8-(2x-1)^2}}dx.$$

נשתמש באינטגרל המידי $\int\frac{1}{\sqrt{m^2-(x+n)^2}}dx=\arcsin\frac{x+n}{m}$

$$\int \frac{6}{\sqrt{7-4x^2+4x}}dx = 6\int \frac{1}{\sqrt{8-(2x-1)^2}}dx = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{8}}\right)+C.$$

**סעיף ג**

$$\int \frac{5}{\sqrt{x^2+4x+4}}dx = 5\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2}}dx = 5\int \frac{1}{|x+2|}dx = 5\ln|x+2|+C.$$

**סעיף ד**

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+5x-6}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+2.5)^2-0.25}}dx = \ln\left((x+2.5)+\ln\sqrt{(x+2.5)^2-0.25}\right)+C$$

**הצבות טריגונומטריות $x = a\sin t, x = a\cos t$**

כאשר נתון אינטגרל מהצורה $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$ ניתן להשתמש בהצבה $x = a\sin t$ או $x = a\cos t$.

**תרגיל**

חשב את האינטגרל $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$.

**פתרון**

נציב $x = 2\sin t$ ואז $dx = 2\cos t dt$ ו $\sin t = \frac{x}{2} \Leftarrow t = \arcsin\frac{x}{2}$.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{4\sin^2 t\cdot 2\cos t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}dt = 4\int \sin^2 t dt.$$

נשתמש בזהות $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ ונקבל $4\int \sin^2 t dt = 2\int (1-\cos 2t)dt = 2t-\sin 2t$.

נשים לב ש $\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}$.

נקבל ש $2t-\sin 2t = 2\arcsin\frac{x}{2} - x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$.

**הצב טריגונומטרית אוניברסאלית $t = \tan\frac{x}{2}$.**

**תרגיל**

חשב $\int \frac{dx}{\cos x+\sin x+1}$.

**פתרון**

נשתמש בהצבה $t = \tan\frac{x}{2}$ ואז $\cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$, $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

נציב את הערכים הנ"ל ונקבל

$$\int \frac{dx}{\cos x + \sin x + 1} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1+t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| = \ln\left|\tan\frac{x}{2} + 1\right|.$$