# **הרצאה 10**

## **התכנסות נקודתית**

**הגדרה**

סדרה $\{f_n(x)\}$ של פונקציות, היא התאמה, שבה לכל $n$ טבעי מתאימה פונקציה $f_n(x)$.

לכל $x_0$ שנציב, מתקבלת סדרת מספרים: $\{f_n(x_0)\}$. אם $\{f_n(x_0)\}$ מתכנסת, אז נאמר שסדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}$ מתכנסת נקודתית ב- $x_0$.

אם לכל $x_0 \in I$, $\{f_n(x)\}$ מתכנסת נקודתית, אז נאמר ש- $\{f_n(x)\}$ מתכנסת נקודתית בקטע $I$.

**הגדרה**

בהינתן סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}$, פונקצית הגבול (אם קיימת) היא $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

**תרגיל**

קבע התכנסות של: $f_n(x)=x^n$ בקטע $[0,1]$.

**פתרון**

לכל $x\in(0,1]$ מתקיים $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

עבור $x=1$ מתקיים: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$.

בסה"כ סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית בכל $[0,1]$ ופונקצית הגבול היא:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,1) \\ 1 & x=1\end{cases}.$$

## **התכנסות במידה שווה**

**הגדרה**

תהא $\{f_n(x)\}$ סדרת פונקציות המוגדרת בקטע $I$. נאמר כי $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה בקטע $I$ אם לכל $0<\varepsilon$ קיים $n_0$ טבעי כך שלכל $n_0<n$ ולכל $x\in I$ מתקיים $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

**משפט**

אם $\{f_n(x)\}$ פונקציות רציפות ומתכנסות במידה שווה בקטע $I$,

אז פונקצית הגבול $f(x)$ רציפה בקטע $I$.

**דוגמה**

הפונקציה $f_n(x)=x^n$ לא מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,1]$. (פונקציית הגבול לא רציפה).

**הערה**

ההפך לא בהכרח נכון.

**משפט (מבחן ה $\lim-\sup$):**

סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה ל $f(x)$ בקטע $I$, אם ורק אם

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{n\in I}\{|f_n(x)-f(x)|\}\right]=0.$$

**תרגיל**

קבע התכנסות של $f_n(x)=\ln\left(x+\frac{x^2}{n}\right)$ ב: א. $[a,b]$ $a>0$ ב. $(0,\infty)$.

**פתרון**

נבדוק התכנסות נקודתית: לכל $x_0>0$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(x_0+\frac{x_0^2}{n}\right)=\ln x_0$.

כלומר הסדרה מתכנסת נקודתית בשני הסעיפים.

נבדוק התכנסות במ"ש בסעיף א.

$$\sup_{x\in[a,b]}\left\{\left|\ln\left(x+\frac{x^2}{k}\right)-\ln x\right|\right\}=\sup_{x\in[a,b]}\left\{\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right\}=\ln\left(1+\frac{b}{k}\right)\xrightarrow{n\to\infty}0 .$$

כלומר ההתכנסות היא במידה שווה.

נבדוק התכנסות במידה שווה עבור סעיף ב

$\sup_{x\in(0,\infty)}\left\{\left|\ln\left(x+\frac{x^2}{k}\right)-\ln x\right|\right\}=\sup_{x\in(0,\infty)}\left\{\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right\}=\infty$ וההתכנסות כאן אינה במידה שווה.

ראינו במקרה זה דוגמא שהפונקציה הגבולית רציפה, אבל ההתכנסות היא לא במידה שווה.

**<u>שאלה 1</u>**

עבור סדרות הפונקציות הבאות מצאו את פונקצית הגבול (אם היא קיימת), וקבעו אם ההתכנסות היא נקודתית או במידה שווה.

א. $f_n(x)=\cos^{2n}(x)$ בקטע $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

ב. $f_n(x)=\frac{\arctan x}{n}$ ב $R$.

ג. $f_n(x)=\frac{1}{nx+1}$ בקטע $(0,\infty)$.

ד. $f_n(x)=x^n\left(1-x^n\right)$ בקטע $[0,1]$.

**<u>פתרון שאלה 1</u>**

**<u>סעיף א</u>**

בקטע $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ מתקיים $0\le\cos^2 x\le 1$. בקטע הנ"ל ללא $x=0$ מתקיים $0\le\cos^2 x<1$.

נקבל עבור $x=0$: $f_n(0)=\cos^{2n}(0)=1^{2n}=1\xrightarrow{n\to\infty}1$.

עבור $x\neq 0$ מכיוון ש $0\le\cos^2 x<1$: $f_n(x)=\cos^{2n}(x)=\left(\cos^2 x\right)^n\xrightarrow{n\to\infty}0$.

נקבל שפונקצית הגבול היא $f(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$.

קיבלנו סדרת פונקציות רציפות שמתכנסת לפונקציה לא רציפה ולכן זאת התכנסות נקודתי ולא התכנסות במידה שווה.

**<u>סעיף ב</u>**

$f_n(x)=\frac{\arctan x}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$ ופונקצית הגבול היא $f(x)=0$.

נבדוק האם ההתכנסות היא במ"ש בעזרת מבחן $\lim-\sup$ ונקבל

$\sup_{x\in R}\left\{\frac{\arctan x}{n}-0\right\}=\frac{\pi}{2n}\xrightarrow{n\to\infty}0$ וההתכנסות היא במ"ש.

**<u>סעיף ג</u>**

$f_n(x)=\frac{1}{nx+1}\xrightarrow{n\to\infty}0$ ופונקצית הגבול היא $f(x)=0$.

נבדוק האם ההתכנסות היא במ"ש בעזרת מבחן $\lim-\sup$ ונקבל

$\sup_{x\in(0,\infty)}\left\{\frac{1}{nx+1}-0\right\}=1\xrightarrow{n\to\infty}\neq 0$ וההתכנסות היא אינה במ"ש.

**<u>סעיף ד</u>**

$f_n(x)=x^n\left(1-x^n\right)\xrightarrow{n\to\infty}0$ ופונקצית הגבול היא $f(x)=0$.

נבדוק האם ההתכנסות היא במ"ש בעזרת מבחן $\lim-\sup$ ונקבל $\sup_{x\in[0,1]}\left\{x^n\left(1-x^n\right)-0\right\}$

הפונקציה $f(x)=x^n-x^{2n}$ רציפה בקטע הסגור $[0,1]$ ולכן מקבלת בקטע מקסימום.

$f'(x)=nx^{n-1}-2nx^{2n-1}\Rightarrow nx^{n-1}(1-2x^n)=0$ הנגזרת מתאפסת ב $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$

$f_n(0)=0;\ f_n(1)=0;\ f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)=\frac{1}{4}$ המקסימום לכל $n$ טבעי הוא $\frac{1}{4}\neq 0$ וההתכנסות היא לא במידה שווה.

**<u>שאלה 2</u>**

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

אם $f_n(x)$ מתכנס במידה שווה ל $f(x)$ בקטע $I$ אזי $g(x)f_n(x)$ מתכנס במידה שווה ל $g(x)f(x)$.

**<u>פתרון שאלה 2</u>**

לא נכון. נבחר $f_n(x)=\frac{1}{n}$ בקטע $(0,1)$ שזאת סדרה שמתכנסת במידה שווה ל $0$ ונבחר $g(x)=\frac{1}{x}$ אז $g(x)f_n(x)=\frac{1}{nx}$ לא מתכנס במידה שווה.

נבדוק האם ההתכנסות היא במ"ש בעזרת מבחן $\lim-\sup$ ונקבל $\sup\limits_{x\in(0,1)}\left\{\frac{1}{nx}-0\right\}=\infty\neq 0$.