הרצאה 11

טורי פונקציות

מטרת השיעור: בהינתן סדרת פונקציות $\left\{f_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ לבחון לאילו ערכי x הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס.

דוגמא

נתבונן בסדרת הפונקציות $f_n(x)=x^n$. ז"א $f_1(x)=x^1, f_2(x)=x^2, f_3(x)=x^3, f_4(x)=x^4,\dots$.

נרצה לבדוק לאילו ערכי x הטור

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+f_4(x)+\dots=x+x^2+x^3+x^4+\dots$ מתכנס.

נשים לב שקיבלנו סדרה הנדסית שמנתה x. ראינו שסדרה הנדסית מתכנסת רק כאשר $-1<q<1$ ציינו ש $q\neq 0$ במקרה שלנו אם $x=0$ הטור הוא סכום של אפסים ולכן מתכנס. סה"כ קיבלנו שהטור מתכנס כאשר $-1<x<1$ ומתבדר כאשר $|x|\geq 1$.

הגדרה

תהא $f_n(x)$ סדרת פונקציות המוגדרת בקטע I. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ נקרא טור פונקציות.

נשים לב שבכל נקודה $x_0\in I$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ הוא טור מספרים.

דוגמא

נתבונן בדוגמה הקודמת. נבחר $x_0=\frac{1}{2}$ ונקבל את סדרת המספרים $f_n\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

נרשום את איברי הסדרה במפורש $f_1\left(\frac{1}{2}\right), f_2\left(\frac{1}{2}\right), f_3\left(\frac{1}{2}\right), f_4\left(\frac{1}{2}\right),\dots$ ז"א

$\left(\frac{1}{2}\right)^1,\left(\frac{1}{2}\right)^2,\left(\frac{1}{2}\right)^3,\left(\frac{1}{2}\right)^4,\dots$ מכיוון שהסדרה הנדסית שמנתה $\frac{1}{2}$ ניתן לחשב את סכום הסדרה כפי שהראינו בהרצאה הראשונה.

נרשום תחילה את סדרת הסכומים החלקים ז"א

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2,\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2,\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3,\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4,\dots$$

ע"י חישוב סכום סדרה חשבונית נקבל שהאיבר הכללי בסדרת הסכומים החלקיים הוא: $S_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ואז $\lim_{n\to\infty} S_n=1$.

אפשר לבצע את אותו תהליך לכל x_0 שנבחר. לכל x_0 נקבל את תוצאת הסכום של הטור ונסמן את פונקצית התוצאות בפונקציה $S(x)$. הפונקציה $S(x)$ תהייה מוגדרת רק בתחום I שבו הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס, ז"א לכל $x_0\in I$ טור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ מכנס.

הגדרה

נסמן את סדרת הסכומים החלקיים $S_k(x)=\sum_{n=1}^{k} f_n(x)$, ואת פונקצית הסכום (אם קיימת) $S(x)=\lim_{k\to\infty} S_k(x)$.

הטור מתכנס בנקודה x_0 אם ורק אם סדרת הסכומים החלקיים $\left\{S_n\left(x_0\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת. נאמר שהטור מתכנס בקטע I אם לכל $x_0 \in I$ הגבול $\underset{n\to\infty}{Lim}\, S_n\left(x_0\right)$ קיים וסופי.

<u>דוגמא</u>

נתבונן בדוגמה הקודמת. מכיוון שקיבלנו סדרה הנדסית שמנתה x והאיבר הראשון שלה הוא x נקבל ש $S_n\left(x\right)=\dfrac{x\left(1-x^n\right)}{1-x}$ נשים לב שהגבול $\underset{n\to\infty}{Lim}\, S_n\left(x\right)$ קיים וסופי לכל x בקטע $\left(-1,1\right)$ ומתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} S_n\left(x\right)=\dfrac{x}{1-x}$ ולכן הטור מתכנס בקטע $\left(-1,1\right)$ ופונקצית הסכום היא $S\left(x\right)=\dfrac{x}{1-x}$.

<u>משפט – מבחן ה-M של ווירשטראס:</u>

יהא $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)$ טור פונקציות מוגדר בקטע I. אם קיים טור מספרים חיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, כך ש:

$\left|f_n\left(x\right)\right| \le a_n$ לכל $x \in I$ ולכל $n \in N$ אזי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)$ מתכנס במ"ש בקטע I.

<u>תרגיל</u>

הוכח כי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n\left(1-x\right)^n$ במידה שווה בקטע $\left[0,1\right]$.

<u>פתרון</u>

נמצא את המקסימום המוחלט והמינימום המוחלט של: $x\left(1-x\right)=x-x^2$ בקטע $\left[0,1\right]$ ע"י גזירה ובדיקה בקצוות. נקבל ש $0 \le x\left(1-x\right) \le \dfrac{1}{4}$ לכל $x \in \left[0,1\right]$ ומכאן $0 \le x^n\left(1-x\right)^n \le \dfrac{1}{4^n}$ לכל $1 \le n$.

הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4^n}$ מתכנס, ולכן על פי מבחן ה-M של ווירשטראס הטור שלנו מתכנס במידה שווה בקטע $\left[0,1\right]$.

<u>הגדרה</u>

אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{k} \left|f_n\left(x\right)\right|$ מתכנס נאמר שטור הפונקציות מתכנס בהחלט.

<u>הערה</u>

לא תמיד נוכל לחשב את פונקצית הסכום, אבל עדיין נוכל לקבוע באיזה תחום טור הפונקציות מתכנס.

<u>הגדרה</u>

טור חזקות סביב a הוא טור פונקציות מהצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\left(x-a\right)^n$.

<u>משפט</u>

לכל טור חזקות קיים מספר אי שלילי R, כך שלכל $x-a<R$ הטור מתכנס ולכל $x-a>R$ הטור מתבדר. ל R קוראים רדיוס ההתכנסות של הטור. אם הטור מתכנס בכל הישר נכתוב $R=\infty$, ואם $R=0$ אז הטור מתכנס רק עבור $x=a$.

<u>דוגמא</u>

ראינו שטור החזקות סביב 0 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ מתכנס בתחום $\left(-1,1\right)$ בלבד, ולכן במקרה זה $R=1$.

<u>תכונות חשובות</u>

1. בתחום $\left(-R+a, R+a\right)$ הטור מתכנס בהחלט.
2. הטור יכול להתכנס בתנאי רק באחד מקצות הקטע.

<u>נוסחת קושי אדמרד</u>

רדיוס ההתכנסות של טור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(x-a\right)^n$ הוא $R=\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}}$.

<u>תרגיל</u>

מצא את תחום התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2\cdot 2^n}{n^4+4}\right)\left(x-1\right)^n$.

<u>פתרון</u>

נשתמש בנוסחת קושי אדמרד ונחשב תחילה הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2\cdot 2^n}{n^4+4}}=\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot\sqrt[n]{\frac{n^2}{n^4+4}}=2$ ולכן רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{2}$ והטור מתכנס בתחום $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

נשאר לבדוק האם הטור מתכנס בקצוות. נבדוק עבור $x=\frac{3}{2}$.

נציב בטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2\cdot 2^n}{n^4+4}\right)\left(x-1\right)^n$ את $x=\frac{3}{2}$ ונקבל את טור המספרים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2\cdot 2^n}{n^4+4}\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2\cdot 2^n}{n^4+4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n^4+4}\right).$$

נשתמש במבחן ההשוואה השני כאשר ניקח את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. ראינו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס.

תזכורת למבחן ההשוואה השני:

<u>מבחן השוואה שני</u>

יהיו נתונים שני טורים חיוביים $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ ונניח שהגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$ קיים. ($b_n\neq 0$ לכל n טבעי)

אזי:

א. אם $0<L<\infty$. שני הטורים מתכנסים או מתבדרים יחד.

ב. אם $L=0$ אז מהתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ נובע התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

ג. אם $L=\infty$ אז מהתבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ נובע התבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

נחשב את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^4+4}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4}{n^4+4}=1$, ולכן שני הטורים מתכנסים או מתבדרים יחד.

מכיוון ש הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס נקבל גם שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n^4+4}\right)$ מתכנס. נבדוק עבור $x=\frac{1}{2}$.

נציב בטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2\cdot 2^n}{n^4+4}\right)\left(x-1\right)^n$ את $x=\frac{1}{2}$ ונקבל את טור המספרים

נבחן תחילה את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2\cdot 2^n}{n^4+4}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2\cdot 2^n}{n^4+4}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n n^2}{n^4+4}\right)$ בהחלט. $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n n^2}{n^4+4}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+4}$ ראינו שהטור מתכנס ולכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n n^2}{n^4+4}\right)$ מתכנס.

ותחום ההתכנסות הוא: $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$.

<u>נוסחת דלמבר</u>

רדיוס ההתכנסות של טור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-a)^n$ הוא $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

<u>תרגיל</u>

מצא את תחום ההתכנסות של הטור: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n!)}\cdot x^n$.

<u>פתרון</u>

נשתמש בנוסחת דלמבר ונחשב את הגבול

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(n!)^2(n+1)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}=4$$

קיבלנו שכאשר $-4<x<4$ הטור מתכנס.

נשאר לבדוק את התכנסות טור המספרים בקצות התחום.

נציב $x=4$ ונקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n!)}\cdot 4^n$.

נציב $x=-4$ ונקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n!)}\cdot 4^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n!)}\cdot(-4)^n$.

ראינו בסמסטר קודם ש $\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot 4^n\neq 0$ ולכן בשני המקרים הטור מתבדר ותחום ההתכנסות שלו הוא $(-4,4)$.

<u>סיכום</u>

כדי לחשב תחום התכנסות של טורי חזקות נפעל לפי השלבים הבאים:

1. נחשב את רדיוס ההתכנסות לפי נוסחת קושי אמרד או נוסחת דלאמבר (בד"כ נשתמש בנוסחת קושי אמרד).
2. נבדוק את התכנסות טור המספרים בקצות התחום.

<u>גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות</u>

יהי $R>0$ רדיוס ההתכנסות של הטור. $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, אזי לכל $|x|<R$ מתקיים:

1. $S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$.

2. $\int_0^x S(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$

דוגמאות

1. נחשב את סכום הטור הבא: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...$ הטור מהווה סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא 1 ומנת הסדרה x, לכן $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ... = \frac{1}{1-x}$.

רדיוס ההתכנסות הוא 1 ולכן לכל $|x| < 1$ מתקיים $\left(\frac{1}{1-x} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ ולכן $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$.

2. כמו בדוגמא 1 אפשר לראות ש $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$. רדיוס ההתכנסות הוא 1 ולכן לכל $|x| < 1$ מתקיים $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right) = \int_0^x \frac{1}{1+x} = \ln|1+x|$.

הערה

1. הטורים שיתקבלו אחרי האינטגרציה בעליי אותו רדיוס התכנסות.
2. אם טור מתכנס בקצה התחום אז אחרי אינטגרציה הוא גם יתכנס בקצה התחום.
3. אם טור מתבדר בקצה התחום אז לאחר גזירה הטור גם יתבדר בקצה התחום.

שימו לב בדוגמא 1 הטור מתכנס בתחום $(-1,1)$ והטור שמתקבל לאחר גזירה מתכנס גם בתחום $(-1,1)$, לעומת זאת בדוגמא 2 הטור מתכנס בתחום $(-1,1)$ והטור שמתקבל לאחר אינטגרציה מתכנס בתחום $(-1,1]$.

תרגיל

חשב את סכום הטור: $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$.

פתרון

נרשום: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \Big|_{x=\frac{1}{3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$. נתבונן בטור הפונקציות: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

טור הפונקציות $f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ מתכנס במידה שווה בקטע $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ולכן

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} \right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right)'$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

$$\ln\frac{3}{2} = -\ln\frac{2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \Big|_{x=\frac{1}{3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}.$$