הרצאה 12

טורי טיילור

נוסחת טיילור

המטרה בנוסחת טיילור היא למצוא קירוב לפונקציה נתונה בנקודה מסוימת באמצעות פולינום.

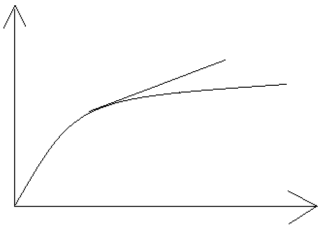
קירוב ליניארי

נראה תחילה דוגמא לקירוב ליניארי לפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ ובעזרתו נחשב קירוב ל $\sqrt{17}$.

מטרה: חישוב קירוב למספר כמו $\sqrt{17}$ שאנחנו לא יכולים לחשב.

נתבונן בפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$.

נמצא את משוואת המשיק בנקודה $(16, f(16))$ ונציב $x=17$ במשוואת המשיק, בצורה כזאת נקבל קירוב ל $\sqrt{17}$ שנקרא קירוב ליניארי.



נמצא את משוואת המשיק בנקודה $(16, f(16))$.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(16)=\frac{1}{8}.$$

משוואת המשיק בנקודה $(16, f(16))$ כאשר השיפוע הוא $f'(16)$ -

$$P_1(x)=f(16)+f'(16)\cdot(x-16) \Leftarrow y-f(16)=f'(16)\cdot(x-16).$$

סימנתי $P_1(x)$ מכיוון שמדובר בפולינום ממעלה ראשונה.

בצורה כזאת קיבלנו פולינום ממעלה ראשונה המשיק בנקודה $x=16$.

באופן כללי פולינום ממעלה ראשונה המשיק בנקודה $x=a$ הוא $P_1(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$.

נשים לב ש $P_1(17)=f(16)+f'(16)\cdot(x-16)=\frac{33}{8}$.

נקבל שהקירוב הליניארי ל $\sqrt{17}$ הוא $\frac{33}{8}$.

שימו לב: $\frac{33}{8}=4.125, \sqrt{17}=4.1231...$.

כעת נרצה למצוא קירוב טוב יותר ל $\sqrt{17}$.

נשים לב שמתקיים: $P_1'(16)=f'(16), P_1(16)=f(16)$.

נמצא פולינום ממעלה שנייה המקיים $P_2''(16)=f''(16), P_2'(16)=f'(16), P_2(16)=f(16)$.

$$P_2(x)=f(16)+f'(16)\cdot(x-16)+\frac{f''(16)}{2}\cdot(x-16)^2$$

נשים לב שאכן מתקיים $P_2''(16)=f''(16), P_2'(16)=f'(16), P_2(16)=f(16)$.

נחשב את $P_2(17)$ ונראה שנקבל קירוב טוב יותר ל $\sqrt{17}$.

$$P_2(x)=f(16)+f'(16)\cdot(x-16)+\frac{f''(16)}{2}\cdot(x-16)^2$$

ראינו ש $f'(16)=\frac{1}{8} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ כעת נחשב את $f''(16)$.

$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(16)=-\frac{1}{256}$.

$P_2(x)=4+\frac{1}{8}\cdot(x-16)-\frac{1}{512}\cdot(x-16)^2 \Rightarrow P_2(17)=4+\frac{1}{8}-\frac{1}{512}=4\frac{63}{512}$.

שימו לב: $4\frac{63}{512}=4.1230....,\sqrt{17}=4.1231....$.

קירוב הרבה יותר טוב מהקירוב הליניארי.

ניתן למצוא קירוב טוב יותר. נמצא פולינום ממעלה שלישית המקיים

$P_2(16)=f(16), P_2'(16)=f'(16), P_2''(16)=f''(16), P_3^{(3)}(16)=f^{(3)}(16)$.

זהו הפולינום

$$P_3(x)=f(16)+f'(16)\cdot(x-16)+\frac{f''(16)}{2!}\cdot(x-16)^2+\frac{f^{(3)}(16)}{3!}\cdot(x-16)^3 .$$

ראינו ש $f'(16)=\frac{1}{8}, f''(16)=-\frac{1}{256}$ נחשב את $f^{(3)}(16)$.

$f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f^{(3)}(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f^{(3)}(16)=\frac{3}{8}\cdot16^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{8192}$.

$$P_3(x)=4+\frac{1}{8}\cdot(x-16)-\frac{1}{512}\cdot(x-16)^2+\frac{1}{16,384}\cdot(x-16)^3 \Rightarrow P_3(17)=4.123107... .$$

$\sqrt{17}=4.123105...$.

בצורה כזרת ככל שנגדיל את מעלת הפולינום נקבל קירוב טוב יותר לפונקציה המקורית.

<u>הגדרה</u>

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

נקרא פולינום טיילור מסדר n של פונקציה $f(x)$ בנקודה $x=a$.

עבור המקרה הפרטי $a=0$ נקבל את נוסחת מקלורן

$$P_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n .$$

<u>הערה</u>

נשים לב שפולינום טיילור נותן קירוב בלבד לפונקציה המקורית.

<u>דוגמאות</u>

1. עבור הפונקציה $\cos x$ נקבל ש $P_8(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}$.
2. עבור הפונקציה $\sin x$ נקבל ש $P_7(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}$.
3. עבור הפונקציה e^x נקבל ש $P_4(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}$.

<u>תרגיל</u>

מצא את $P_3(x)$ עבור $f(x)=e^{2x}$.

<u>פתרון</u>

כדי למצוא את $P_3(x)$ יש לחשב את $f(0), f'(0), f''(0), f^{(3)}(0)$.

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow f(0)=1$$
$$f'(x)=2e^{2x} \Rightarrow f'(0)=2$$
$$f''(x)=4e^{2x} \Rightarrow f''(0)=4$$
$$f^{(3)}(x)=8e^{2x} \Rightarrow f^{(3)}(0)=8$$

ולכן $P_3(x)=1+2x+\frac{4}{2!}x^2+\frac{8}{3!}x^3 \Leftarrow P_3(x)=1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3$.

<u>הגדרה</u>

ההפרש בין הפונקציה המקורית לפולינום טיילור נקרא שארית ומתקיים $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$.

<u>משפט לגרנז'</u>

נניח ש $P_n(x)$ פולינום טיילור מסדר n של פונקציה $f(x)$ בנקודה a אז קיימת נקודה $a<c<x$

כך ש $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

<u>תרגיל</u>

קרב את המספר e עם שגיאה קטנה מ 0.001

<u>פתרון</u>

נסמן $f(x)=e^x$. אזי $f(1)=e^1=e$. אנו רוצים לקרב את $f(1)$. אם נשתמש בקירוב $P_n(1)$ אז השגיאה היא $|f(1)-P_n(1)|=|R_n(1)|$. אנו מחפשים n כך ש $|R_n(1)|<0.001$ ואז $P_n(1)$ הנו הקירוב המבוקש. לפי משפט טילור אנו יודעים שישנו מספר c בין 0 ו 1 כך ש $R_n(1)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}1^{n+1}$

$f^{(n+1)}(c)=e^c$ ו $e<3$ אזי $e^c<e^1=e<3$ כך ש $R_n(1)=\frac{e^c}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$ נחשב את הערך של $\frac{3}{(n+1)!}$ עבור $n=1,2,\ldots,6$ ונקבל ש$|R_n(1)|<0.001$ כאשר $n\ge 6$. מכאן ש $\frac{3}{(n+1)!}$ הוא הקירוב המבוקש. $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$, לכן

$$P_6(1)=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\ldots+\frac{1}{6!}=\frac{1957}{720}\approx 2.718055556$$

<u>טורי טיילור ומקלורן</u>

לפונקציה $f(x)$ אשר גזירה אינסוף פעמים בסביבת הנקודה $x=a$ ניתן להתאים את הטור הבא:

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

הנקרא טור טיילור של $f(x)$ בסביבת הנקודה $x=a$.

אם $a=0$ הטור המתקבל $f(0)+f'(0)(x)+\frac{f''(0)}{2!}(x)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n+\ldots$ נקרא טור מקלורן. שימו לב שטור מקלורן הוא מקרה פרטי של טור טיילור.

במסגרת הקורס אנו נשתמש בעיקר בטור מקלורן.

<u>משפט</u>

תהיי $f\left(x\right)$ פונקציה שגזירה אינסוף פעמים בקטע $\left(-p,p\right)$ ונניח שקיים M כך ש $\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|<M$

לכל n טבעי ולכל x בקטע $\left(-p,p\right)$, אזי בקטע זה טור מקלורן של $f\left(x\right)$ מתכנס ומתקיים

$$f\left(x\right)=f\left(0\right)+f'(0)\left(x\right)+\frac{f''(0)}{2!}\left(x\right)^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\left(x\right)^n+... .$$

<u>הערה</u>

ניתן לרשום את המשפט גם לטור טיילור.

<u>תרגיל</u>

רשום את טור מקלורן עבור הפונקציות:

1. $\sin x$
2. $\cos x$

<u>פתרון</u>

1. תחילה נחשב את $f\left(0\right), f'(0), f''(0), f^{(3)}\left(0\right), f^{(4)}\left(0\right)$ לאחר מכן נמצא את החוקיות ונסיק מהו $f^{(n)}\left(0\right)$ ואז נוכל לרשום את טור מקלורן.

$f\left(0\right)=\sin 0=0$

$f'(0)=\cos 0=1$

$f''(0)=-\sin 0=0$ שימו לב שקיבלנו מחזוריות. נבדוק מה החוקיות של הסדרה

$f^{(3)}\left(0\right)=-\cos 0=-1$

$f^{(4)}\left(0\right)=\sin 0=0$

$$0\cdot x^0+1\cdot x^1+\frac{0}{2!}\cdot x^2-\frac{1}{3!}\cdot x^3+\frac{0}{4!}\cdot x^4+\frac{1}{5!}\cdot x^5+\frac{0}{6!}\cdot x^6-\frac{1}{7!}\cdot x^7+....$$

ניתן להאת החוקיות ולקבל ש $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ ותחום ההתכנסות הוא $\left(-\infty,\infty\right)$.

2. נשתמש בסעיף 1 כדי לפתח את טור מקלורן של $\cos x$. $(\sin x)'=\cos x$ ולכן

$$\cos x=(\sin x)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

ותחום ההתכנסות גם כן $\left(-\infty,\infty\right)$

<u>דוגמאות נוספות לטורי מקלורן</u>

1. $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ בתחום $\left(-1,1\right)$.
2. $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ בתחום $\left(-\infty,\infty\right)$.
3. $\ln\left(1+x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ בתחום $\left(-1,1\right]$.

לפיתוח של פונקציות לטור חזקות חוץ משימוש ישיר בנוסחת מקלורן ניתן להתבסס על טורים ידועים ולהשתמש בעקרון ההצבה, בשיטות אינטגרציה או גזירה של טורים.

<u>דוגמאות</u>

1. ראינו שפיתחנו את הטור עבור $\cos x$ שימוש בגזירה של טורים.
2. ראינו שפיתחנו את הטור עבור $\ln\left|1+x\right|$ שימוש באינטגרציה של טורים.

3. נפתח לטור חזקות את הפונקציה $f\left(x\right)=e^{-x}$ נשתמש בטור הבא $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, ואז

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-x\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n x^n}{n!}.$$

4. נפתח לטור חזקות את הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{1}{1+x^2}$ נשתמש בטור הבא $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^n$,

ואז $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^{2n}$.

<u>סיכום</u>

ראינו שניתן לפתח פונקציה לטור חזקות.

1. שימוש בנוסחת מקלורן, חישוב המקדמים הראשונים של הטור ומציאת חוקיות.
2. שימוש בנוסחאות ידועות מראש והצבה מתאימה.
3. שימוש בנוסחאות ידועות ובאינטגרציה של איברי הטור.
4. שימוש בנוסחאות ידועות ובגזירה של איברי הטור.