הרצאה 13

שיטת הפרדת משתנים

משוואה דיפרנציאלית מהצורה $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$

$\left(f_1(x)\neq 0, g_1(y)\neq 0, f_2(x)\neq 0, g_2(y)\neq 0\right)$ נפתור בעזרת השיטה הנ"ל.

דרך לפתרון

$$f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0\Rightarrow\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=0\Rightarrow\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=c$$

תרגיל

מצא פונקציה העוברת דרך הנקודה $(1,1)$ ומקיימת $y'=\frac{-x}{y+1}$.

פתרון

נרשום תחילה את המשוואה: $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y+1}\Rightarrow(y+1)dy+xdx=0.$$

כעת נפתור את המשוואה בעזרת שיטת הפרדת המשתנים.

$$(y+1)dy+xdx=0\Rightarrow\int(y+1)dy+\int xdx=0\Rightarrow\frac{y^2}{2}+y+\frac{x^2}{2}=c.$$

נתון שהפונקציה עוברת דרך הנקודה $(1,1)$ ולכן ניתן למצוא את הקבוע c.

$$\frac{1^2}{2}+1+\frac{1^2}{2}=c\Rightarrow c=2.$$

$$\frac{y^2}{2}+y+\frac{x^2}{2}=2.$$

משוואה הומוגנית

המשוואה $y'=f(x,y)$ נקראת משוואה הומוגנית אם $f(tx,ty)=f(x,y)$.

דוגמא

המשוואה $y'=\frac{(x+y)^2}{xy}$ הומוגנית.

$$f(x,y)=\frac{(x+y)^2}{xy}\Rightarrow f(tx,ty)=\frac{(tx+ty)^2}{tx\cdot ty}\Rightarrow f(tx,ty)=\frac{t^2(x+y)}{t^2xy}$$

$$f(tx,ty)=\frac{(x+y)^2}{xy}\Rightarrow f(tx,ty)=f(x,y)$$

דרך לפתרון

נציב $y=ux$ ואז $y'=u'x+u\Leftarrow u'x+u=f(x,ux)\Leftarrow u'x+u=f(1,u)$ ופותרים בשיטת הפרדת המשתנים.

תרגיל

פתור את המשוואה הדיפרנציאלית $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$.

פתרון

$y'=\frac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x}$ נוכיח שהמשוואה הומוגנית.

$$f(tx,ty)=\frac{\sqrt{(tx)^2-(ty)^2}+ty}{tx} \Leftarrow f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x}$$

ואז $f(x,y)=f(tx,ty)$.

נציב $y=ux$ ואז $u'x+u=f(1,u) \Leftarrow u'x+u=f(x,ux) \Leftarrow y'=u'x+u$

ז"א $u'x=\sqrt{1-u^2} \Leftarrow u'x+u=\frac{\sqrt{1-u^2}+u}{1}$

נפתור את המשוואה $u'x=\sqrt{1-u^2}$ בעזרת הפרדת המשתנים

$$u=\sin(\ln(cx)) \Leftarrow \arcsin u=\ln(cx) \Leftarrow \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x} \Leftarrow \frac{du}{dx}x=\sqrt{1-u^2}$$

נציב חזרה ונקבל $u=\sin(\ln(cx)) \Rightarrow \frac{y}{x}=\sin(\ln(cx)) \Rightarrow y=x\sin(\ln(cx))$

<u>משוואה ליניארית מסדר ראשון</u>

משוואה ליניארית מסדר ראשון היא משוואה מהצורה $y'+p(x)y=q(x)$.

כאשר $q(x)=0$ נאמר שהמשוואה הומוגנית. ז"א $y'+p(x)y=0$.

<u>פתרון משוואה ליניארית הומוגנית מסדר ראשון</u>

$$y'+p(x)y=0$$
$$\frac{dy}{dx}=-p(x)y$$
$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx$$
$$\ln y=-\int p(x)dx+c$$
$$y=c_1e^{-\int p(x)dx}$$

<u>דוגמא</u>

$$y'-y\sin x=0$$
$$y'=y\sin x$$
$$\frac{dy}{dx}=y\sin x$$
$$\frac{dy}{y}=\sin xdx$$
$$\ln y=-\cos x+c$$
$$y=c_1e^{-\cos x}$$

<u>משפט</u>

כל פתרון של משוואה לא הומוגנית הוא סכום פתרון כללי של משוואה הומוגנית ופתרון פרטי של משוואה לא הומוגנית.

<u>דרך לפתרון משוואה לא הומוגנית מסדר ראשון</u>

שלב א: נמצא פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית.

שלב ב: נמצא בעזרת ניחוש פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית.

שלב ג: נחבר את התשובות שקיבלנו בשלבים הקודמים.

דוגמא

$$y'+\frac{y}{x}=3x$$

פתרון

שלב א: נמצא פתרון למשוואה ההומוגנית $y'+\frac{y}{x}=0$

$$y'=-\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln y=-\ln x+\ln c\Rightarrow y=\frac{c}{x}$$

שלב ב: נשים לב ש $y_p=x^2$ מהווה פתרון למשוואה הלא הומוגנית

שלב ג: הפתרון הכללי הוא $y=\frac{c}{x}+x^2$

ניתן למצוא את הפתרון הכללי גם ללא ניחוש אלא בשיטת וריאציית המקדמים.

נרשום את הקבוע בפתרון של המשוואה ההומוגנית כמשתנה של x ונציב במשוואה הלא הומוגנית

$$y=\frac{c(x)}{x}\Rightarrow y'=\frac{xc'(x)-c(x)}{x^2}\Rightarrow\frac{xc'(x)-c(x)}{x^2}+\frac{c(x)}{x^2}=3x\Rightarrow\frac{c'(x)}{x}=3x$$

$$c'(x)=3x^2\Rightarrow c(x)=x^3\Rightarrow y=x^2$$

וקיבלנו פתרון פרטי גם ללא שיטת הניחוש.

תרגיל

פתור את המשוואה $y'-y\sin x=\sin x\cos x$.

פתרון

ראינו מקודם שהפתרון של המשוואה $y'-y\sin x=0$ הוא $y=ce^{-\cos x}$.

נמצא בעזרת וריאציית המקדמים פתרון פרטי למשוואה $y'-y\sin x=\sin x\cos x$.

$$y=c(x)e^{-\cos x}\Rightarrow y'=c'(x)e^{-\cos x}+c(x)\sin xe^{-\cos x}$$

נציב במשוואה ונקבל

$$c'(x)e^{-\cos x}+c(x)\sin xe^{-\cos x}-c(x)\sin xe^{-\cos x}=\sin x\cos x$$

$$c'(x)=\sin x\cos xe^{\cos x}\Rightarrow c(x)=-\cos xe^{\cos x}+e^{\cos x}$$

הפתרון הפרטי הוא $y=\left(-\cos xe^{\cos x}+e^{\cos x}\right)e^{-\cos x}\Rightarrow y=-\cos x+1$.

הפתרון הכללי הוא $y=ce^{-\cos x}-\cos x+1$.

תרגיל

פתור את המשוואה $y'+\tan y=\frac{x}{\cos y}$.

פתרון

נציב $t=\sin y \Leftarrow t'=y'\cos y$

$$t'+t=x\Leftarrow y'\cos y+\sin y=x\Leftarrow y'+\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{x}{\cos y}$$

קיבלנו משוואה שאנו יודעים לפתור $t=ce^{-x}+x-1$ ואז $y=\arcsin\left(ce^{-x}+x-1\right)$.

הערה

פתרון שלא ניתן להגיע אליו בעזרת הפתרון הכללי נקרא פתרון סינגולארי.

דוגמא

$$y'=-2xy^2$$

נמצא פתרון כללי למשוואה

$-\frac{y'}{y^2}=2x$ נציב $t=\frac{1}{y}\Leftarrow t'=-\frac{y'}{y^2}\Leftarrow t'=2x\Leftarrow t=x^2+c\Leftarrow y=\frac{1}{x^2+c}$.

נשים לב ש $y=0$ הוא גם פתרון של המשוואה אבל לא ניתן להגיע אליו מהפתרון הכללי ולכן הוא פתרון סינגולארי.

<u>משוואת ברנולי</u>

משוואת ברנולי היא משוואה מהצורה $y'+p(x)y=q(x)y^n$ כאשר $n\neq 0,1$.

במקרה זה נציב $z=\frac{1}{y^{n-1}} \Leftarrow z'=\frac{(1-n)\cdot y'}{y^n}$.

נחלק את המשוואה ב y^n נקבל $\frac{y'}{y^n}+\frac{p(x)y}{y^n}=q(x)$ ואז $\frac{z'}{1-n}+p(x)z=q(x)$ קיבלנו משוואה ליניארית שאנחנו יודעים לפתור.

<u>תרגיל</u>

פתור את המשוואה $y'-2xy=3x^3y^2$.

<u>פתרון</u>

נשים לב שזו משוואת ברנולי כאשר $n=2$.

נחלק ב y^2 ונקבל $\frac{y'}{y^2}-\frac{2x}{y}=3x^3$ נציב $z=\frac{1}{y} \Leftarrow z'=-\frac{y'}{y^2}$ ואז נקבל את המשוואה $-z'-2xz=3x^3 \Leftarrow z'+2xz=-3x^3$.

קיבלנו משוואה ליניארית לא הומוגנית מסדר ראשון.

נפתור את המשוואה ההומוגנית

$$z'+2xz=0 \Leftarrow z'=-2xz \Leftarrow \frac{dz}{dx}=-2xz \Leftarrow \frac{dz}{z}=-2xdx \Leftarrow z=ce^{-x^2}$$

נמצא פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית.

נרשום את הקבוע בפתרון של המשוואה הלא הומוגנית כפונקציה של x ונקבל

$$z=c(x)e^{-x^2} \Leftarrow z'=c'(x)e^{-x^2}-2xc(x)e^{-x^2}$$

נציב במשוואה הלא הומוגנית

$$c'(x)e^{-x^2}-2xc(x)e^{-x^2}+2xc(x)e^{-x^2}=-3x^3$$

$$c'(x)=-3x^2e^{x^2} \Rightarrow c(x)=\frac{-3}{2}x^2e^{x^2}+\frac{3}{2}e^{x^2}$$

כאשר את האינטגרל פתרנו ע"י אינטגרציה בחלקים.

נציב את $c(x)$ שקיבלנו במשוואה בפתרון המשוואה ההומוגנית ונקבל פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית.

$$z_p=\left(-\frac{3}{2}x^2e^{x^2}+\frac{3}{2}e^{x^2}\right)e^{-x^2} \Rightarrow z_p=-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}$$

$$z=ce^{-x^2}-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}$$

מכיוון שהצבנו $z=\frac{1}{y}$ נקבל $y=\frac{2}{2ce^{-x^2}-3x^2+3}$

משוואה מדויקת

למשוואה $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ קוראים משוואה מדוייקת אם האגף השמאלי של המשוואה מייצג דיפרנציאל שלם של פו' כלשהי.

משפט אוילר

המשוואה $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ מדויקת אם ורק אם $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

דרך לפתרון משוואה מדויקת

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, du=M(x,y)dx+N(x,y)dy \Rightarrow u(x,y)=c$$

מטרה לחשב את $u(x,y)$.

מכיוון ש $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$ נקבל ש

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$$

ואז $u(x,y)=\int M(x,y)dx+c(y)\ (1)$

נגזור לפי y ונקבל $\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx+c(y)\right)=N(x,y)$

$$\frac{\partial\int M(x,y)dx}{\partial y}+c'(y)=N(x,y)$$

ואז

$$c'(y)=-\frac{\partial\int M(x,y)dx}{\partial y}+N(x,y)$$

מכיוון שזו משוואה מדויקת נקבל שהאגף הימני של המשוואה תלוי ב y בלבד ולכן נוכל למצוא את $c(y)$. נציב ב (1) ונקבל $u(x,y)$ נשווה לקבוע ונקבל את הפתרון.

תרגיל

$$\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0$$

נבדוק שהמשוואה מדויקת

$$M(x,y)=3x^2+6xy^2, N(x,y)=6x^2y+4y^3$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=12xy, \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=12xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6xy^2$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+4y^3$$

ואז $u(x,y)=\int\left(3x^2+6xy^2\right)dx+c(y)$

נקבל ש $u(x,y)=x^3+3x^2y^2+c(y)$.

נגזור לפי y ונקבל

$$6x^2y+4y^3=6x^2y+c'(y)$$
$$c'(y)=4y^3$$
$$c(y)=y^4$$

נציב חזרה ונקבל $u(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4$.

הפתרון הוא $x^3 + 3x^2 y^2 + y^4 = c$.

<u>גורם אינטגרציוני</u>

בהינתן משוואה דיפרנציאלית $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ נמצא פונקציה μ כך שהמשוואה $\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$ תהייה משוואה מדויקת.

שיטה זו נקראת שיטת גורם אינטגרציוני.

הערה: לא תמיד ניתן לפתור את המשוואה הלא מדויקת בצורה זאת.

כדי שהמשוואה $\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$ תהייה מדויקת צריך להתקיים

$$\frac{\partial(\mu N)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \Leftarrow \frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot M + \frac{\partial M}{\partial y}\cdot \mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}\cdot N + \frac{\partial N}{\partial x}\cdot \mu \; .$$

<u>תרגיל</u>

פתור בעזר שיטת הגורם האינטגרציוני את המשוואה $(1 - x^2 y)dx + x^2(y - x)dy = 0$

אם ידוע שהגורם האינטגרציוני μ היא פונקציה של x בלבד.

<u>פתרון</u>

מכיוון שהגורם האינטגרציוני μ היא פונקציה של x בלבד נקבל ש $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ נציב המשוואה שקיבלנו קודם ונקבל $\frac{\partial M}{\partial y}\cdot \mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}\cdot N + \frac{\partial N}{\partial x}\cdot \mu$.

$\frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 3x^2, \frac{\partial M}{\partial y} = -x^2$ נציב במשוואה ונקבל

$$-x^2 \mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}\left(x^2 y - x^3\right) + \left(2xy - 3x^2\right)\cdot \mu \Rightarrow \left(2x^2 - 2xy\right)\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}\left(x^2 y - x^3\right)$$

$$2x(x - y)\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}\left(-x^2\right)(x - y) \Rightarrow 2x\mu = -x^2 \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\mu} = -\frac{2}{x}\partial x$$

$$\ln \mu = -2\ln x \Rightarrow \ln \mu = \ln \frac{1}{x^2} \Rightarrow \mu = \frac{1}{x^2}$$

הגורם האינטגרציוני הוא $\frac{1}{x^2}$ ואז המשוואה $\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y - x)dy = 0$ היא מדוייקת.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2} - y \\ \frac{\partial u}{\partial y} = y - x \end{cases} \Rightarrow u(x,y) = -\frac{1}{x} - yx + c(y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -x + c'(y) \Rightarrow y - x = -x + c'(y)$$

ולכן $c'(y) = y \Rightarrow c(y) = \frac{y^2}{2}$ נציב חזרה ונקבל $c = -\frac{1}{x} - yx + \frac{y^2}{2}$.