הרצאה 7
האינטגרל המסוים

הגדרה

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע הסגור $[a,b]$. יהי n מספר טבעי, ותהי T חלוקה של $[a,b]$ ל n תתי-קטעים

$$T: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

נסמן את קטעי החלוקה ע"י

$$\Delta x_1 = [x_0, x_1], \Delta x_2 = [x_1, x_2], \ldots, \Delta x_n = [x_{n-1}, x_n]$$

ונסמן $\Delta T = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_{31}, \ldots, \Delta x_n\}$ ונקרא ל ΔT הפרמטר של החלוקה T. מכל קטע Δx_i נבחר נקודה שרירותית c_i, אזי הביטוי $\sigma_T(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ נקרא הסכום האינטגרלי של רימן המתאים לחלוקה T ולבחירת הנקודות c_i.

הפונקציה $f(x)$ נקראת אינטגרבילית לפי רימן בקטע $[a,b]$ אם קיים הגבול $I = \lim_{\Delta T \to 0} \sigma_T(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \lim_{\Delta T \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ והוא בלתי תלוי בבחירת החלוקה T ובבחירת נקודות החלוקה c_i, כל עוד פרמטר החלוקה ΔT שואף לאפס.

את הגבול הזה נסמן ע"י $I = \int_a^b f(x)dx$ ונקרא לו האינטגרל המסוים של הפונקציה $f(x)$ בקטע $[a,b]$.

תכונות האינטגרל המסוים

א. לכל פונקציה $f(x)$ המוגדרת בנקודה $x = a$ נקבע כי $\int_a^a f(x)dx = 0$.

ב. אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אז נקבע כי $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

ג. אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אז לכל מספר קבוע c, הפונקציה $cf(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ומתקיים $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.

ד. אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטעים $[a,b]$ ו $[b,c]$ אז היא אינטגרבילית גם בקטע $[a,c]$ ומתקיים $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

ה. אם $f(x)$ ו $g(x)$ פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ אזי הפונקציות $f(x) \pm g(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ומתקיים $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

ו. אם $f(x)$ ו $g(x)$ פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ אזי הפונקציה $f(x)g(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

נוסחת ניוטון-לייבניץ

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ותהי $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$. אזי

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

דוגמה

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה e^x ולבין הישרים $x=0, x=\ln 4$.

נחשב את האינטגרל המסוים $\int_0^{\ln 4} e^x dx = \left[e^x\right]_0^{\ln 4} = e^{\ln 4} - e^0 = 4-1=3$.

<u>החלפת משתנים</u>

<u>משפט</u>

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, ותהי $x=g(t)$ פונקציה גזירה בקטע $[\alpha,\beta]$ ואשר התמונה שלה שווה לקטע $[a,b]$ כאשר $g(\alpha)=a$ ו $g(\beta)=b$. אזי $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)dt$

<u>שימוש באינטגרלים לחישובים גיאומטריים</u>

<u>חישוב שטחים</u>

א. כאשר $f(x)>0$ - $\int_a^b f(x)dx$ נותן את השטח שבין גרף הפונקציה $f(x)$ לציר ה - x .

ב. כאשר $f(x)<0$ - $\int_a^b f(x)dx$ נותן מספר שלילי כאשר הערך המוחלט הוא של המספר המתקבל הוא השטח שבין גרף הפונקציה $f(x)$ לציר ה - x .

ג. אם הפונקציה $f(x)$ משנה סימן האינטגרל המסוים $\int_a^b f(x)dx$ נותן סכום אלגברי של שטחים: שטחים מעל לציר ה- x עם סימן "+" שטחים מתחת לציר ה x עם סימן "-".

<u>תרגיל</u>

מצא את השטח הכלוא בין הקו $y=1+\arctan x$ וציר ה- x בקטע $[-1,1]$.

<u>פתרון</u>

הפונקציה $y=1+\arctan x$ עולה לכל x ממשי. $y(-1)=1+\arctan(-1)=1-\frac{\pi}{4}>0$ ולכן הפונקציה חיובית לכל x בקטע $[-1,1]$.

כדי לקבל את השטח יש לחשב $\int_{-1}^{1}(1+\arctan x)\,dx$.

נמצא את הפונקציה הקדומה של $\arctan x$ בעזרת אינטגרציה בחלקים.

$\int \arctan x = ?$.

$$u=\arctan x \qquad v=x$$

$$u'=\frac{1}{1+x^2} \qquad v'=1$$

$\int \arctan x = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx$.

$\int \frac{x}{1+x^2}dx = ?$. נשתמש בשיטת ההצבה ונציב $t=x^2 \Leftarrow dt=2xdx$.

$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{2\cdot(1+t)}dt = \frac{1}{2}\ln|1+t| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

$\int \arctan x = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

$$.\int_{-1}^{1}(1+\arctan x)\,dx=\left[x+x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_{-1}^{1}=2$$

תרגיל

חשב את השטח המוגבל ע"י הקווים $y=\ln^2 x$, $y=0$, $x=e$, $x=\frac{1}{e}$.

פתרון

הפונקציה $y=\ln^2 x$ אי שלילית ולכן יש לחשב את $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\ln^2 x\,dx$.

נחשב את $\int\ln^2 x\,dx$ בעזרת אינטגרציה בחלקים.

$$u=\ln^2 x \qquad v=x$$
$$u'=\frac{2\ln x}{x} \qquad v'=1$$

$$.\int\ln^2 x\,dx=x\ln^2 x-2\int\ln x\,dx$$

נחשב את $\int\ln x\,dx$ בעזרת אינטגרציה בחלקים.

$$u=\ln x \qquad v=x$$
$$u'=\frac{1}{x} \qquad v'=1$$

$$.\int\ln x\,dx=x\ln x-\int 1\,dx=x\ln x-x$$

$$\int\ln^2 x\,dx=x\ln^2 x-2\int\ln x\,dx=x\ln^2 x-2x\ln x+2x$$

$$.\int_{\frac{1}{e}}^{e}\ln^2 x\,dx=\left[x\ln^2 x-2x\ln x+2x\right]_{\frac{1}{e}}^{e}=(e-2e+2e)-\left(\frac{1}{e}+\frac{2}{e}+\frac{2}{e}\right)=e-\frac{5}{e}$$

הערה

נניח ש $f(x)\le g(x)$ לכל x בקטע $[a,b]$ אז השטח בין הקווים $y=f(x), y=g(x)$ בקטע $[a,b]$ הוא $\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)dx$.

חישוב נפחים

נפח הגוף שמתקבל ע"י סיבוב הפונקציה סביב ציר ה - x מחושב ע"י הנוסחה $V=\pi\int_a^b y^2(x)\,dx$.

תרגיל

קבל בעזרת האינטגרציה נוסחאות לחישוב של הכדור בעל רדיוס R.

פתרון

אם נסובב את חצי העיגול, שרדיוסו R ומרכזו בראשית הצירים, שמעל ציר x נקבל כדור בעל רדיוס R.

ז"א יש לחש את נפח הגוף המתקבל מסיבוב הפונקציה $y=\sqrt{R^2-x^2}$ סביב ציר ה x בקטע $[-R,R]$.

$$.V=\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R}=\pi\left(2R^3-\frac{2R^3}{3}\right)=\frac{4\pi R^3}{3}$$

<u>חישוב אורך קשת</u>

ניתן לחשב אורך קשת של $y=f\left(x\right)$ בקטע $\left[a,b\right]$ בעזרת הנוסחה $\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$.

<u>תרגיל</u>

חשב את אורך העקום $y=\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}$ בתחום $0\le x\le 3$.

<u>פתרון</u>

נשתמש בנוסחה לחישוב אורך עקום $\int\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$.

$$y=\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$y'=2x\cdot\sqrt{\left(1+x^2\right)}$$

$$\left(y'\right)^2=4x^2\cdot\left(1+x^2\right)$$

נשאר לחשב $\int_0^3\sqrt{1+4x^2+4x^4}dx=\int_0^3\left(1+2x^2\right)dx=\left[x+\frac{2x^3}{3}\right]_0^3=21$.