

הרצאה 8

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

הגדרה

אינטגרל מסוים ייקרא לא אמיתי מסוג ראשון אם הוא בעל גבול אינטגרציה (תחתון או עליון) אינסופי.

תכונות חשובות

א. לכל נקודה c מתקיים: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$.

ב. מספיק שאחד מהאינטגרל באגף ימין יתבדר כדי שהאינטגרל באגף שמאל יתבדר.

ג. $\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$, $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$.

הערה

אם הגבול $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ קיים וסופי נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי $\int_a^{\infty} f(x) dx$ מתכנס, אחרת נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי $\int_a^{\infty} f(x) dx$ מתבדר.

תרגיל

הוכח ש $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$, ($a > 0$) מתכנס $\Leftrightarrow p > 1$.

פתרון

עבור $p > 1$.

$$\begin{aligned} \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-p}{x^{p-1} \cdot (1-p)} \right]_a^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-p}{b^{p-1} \cdot (1-p)} + \frac{p}{a^{p-1} \cdot (1-p)} \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-p}{b^{p-1} \cdot (1-p)} \right] + \frac{p}{a^{p-1} \cdot (1-p)} \end{aligned}$$

מכיוון ש $p > 1$ נקבל ש $\lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-p}{b^{p-1} \cdot (1-p)} \right] = 0$ ואז $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{p}{a^{p-1} \cdot (1-p)}$ ולכן הגבול קיים וסופי

והאינטגרל הלא אמיתי מתכנס.

עבור $p = 1$ נקבל

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln x]_a^b = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln b - \ln a] = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b - \ln a$$

מכיוון שהגבול $\lim_{b \rightarrow \infty} \ln b$ לא סופי נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי מתבדר.

עבור $p < 1$.

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-p}{x^{p-1} \cdot (1-p)} \right]_a^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-p}{b^{p-1} \cdot (1-p)} + \frac{p}{a^{p-1} \cdot (1-p)} \right] = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-p}{b^{p-1} \cdot (1-p)} \right] + \frac{p}{a^{p-1} \cdot (1-p)}$$

מכיוון ש $p < 1$ נקבל ש $\lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-p}{b^{p-1} \cdot (1-p)} \right] = \infty$ ולכן הגבול אינסופי

והאינטגרל הלא אמיתי מתבדר.

תרגיל

לאילו ערכים של הפרמטר p מתכנס האינטגרל $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^p x}$.

פתרון

נשתמש בשיטת ההצבה

נציב $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^p}$$

ומתרגיל קודם האינטגרל מתכנס אם ורק אם $p > 1$.

תרגיל

חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^{\infty} e^{-2x} dx$ ב. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$ ג. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

פתרון

א. $\int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-2x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2b} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

ב. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_a^{-1} = 1 - \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{a} \right) = 1$

ג. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{1+x^2}$

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} [\arctan x]_1^a = \lim_{a \rightarrow \infty} \arctan a - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

$\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^1 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} [\arctan x]_a^1 = \arctan 1 - \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctan a = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$

תרגיל

פתור את האינטגרל $\int_{\frac{1}{4}}^{\infty} \frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}}$

פתרון

נמצא תחיל את הפונקציה הקדומה של $\frac{1}{(4x+1)\sqrt{x}}$

$\int \frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}} = ?$

נשתמש בשיטת ההצבה: $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$\int \frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}} = \int \frac{2dt}{4t^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \arctan(2t) = \arctan 2\sqrt{x}$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\infty} \frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{4}}^b \frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\arctan 2\sqrt{x} \right]_{\frac{1}{4}}^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan 2\sqrt{b} - \arctan 2\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

מבחני השוואה להתכנסות אינטגרלים

מבחן ההשוואה

יהיו $f(x)$ ו $g(x)$ שתי פונקציות אי שליליות בקטע $[a, \infty)$, ואינטגרביליות בקטע $[a, b]$ לכל $a < b$.

נניח שקיים מספר ממשי b_0 כך שלכל $x \geq b_0$ מתקיים $f(x) \leq g(x)$. אזי

א. אם האינטגרל $\int_a^{\infty} g(x) dx$ מתכנס אז גם האינטגרל $\int_a^{\infty} f(x) dx$ מתכנס.

ב. אם האינטגרל $\int_a^{\infty} g(x) dx$ מתבדר אז גם האינטגרל $\int_a^{\infty} f(x) dx$ מתבדר.

תרגיל

עבור אילו ערכים חיוביים של פרמטר p מתכנס האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^p + 1} dx$.

פתרון

מכיוון שלכל p האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x^p + 1} dx$ סופי מספיק לבחון את $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p + 1} dx$.

ראינו מקודם שעבור $p > 1$ האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ מתכנס.

לכל $1 < x$ מתקיים $\frac{1}{x^p + 1} \leq \frac{1}{x^p}$ ולכן עבור $p > 1$ האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p + 1} dx$ מתכנס.

עבור $0 < p \leq 1$, $1 < x$ נקבל ש $1 < x^p$ ובנוסף $\int_1^{\infty} \frac{1}{2x^p} dx$ מתבדר.

לכל $1 < x$ מתקיים $\frac{1}{x^p + x^p} \leq \frac{1}{x^p + 1}$ ולכן עבור $0 < p \leq 1$ האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p + 1} dx$ מתבדר.

תרגיל

קבעו התכנסות/התבדרות של $\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$.

פתרון

לכל $1 < x$ נקבל ש $\arctan x < \frac{\pi}{4}$ ולכן $\frac{\pi}{4x} < \frac{\arctan x}{x}$. מכיוון ש $\int_1^{\infty} \frac{\pi}{4x} dx$ מתבדר נקבל ממבחן

ההשוואה הראשון ש $\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$ מתבדר.

מבחן המנה

יהיו $f(x)$ ו $g(x)$ פונקציות אי שליליות בקטע $[a, \infty)$, ונניח שקיים הגבול $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ אזי

א. אם $0 < L < \infty$ אז שני האינטגרלים $\int_a^{\infty} f(x) dx$ ו $\int_a^{\infty} g(x) dx$ מתכנסים ביחד או מתבדרים

ביחד.

- ב. אם $L = 0$ ואם האינטגרל $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס אז גם האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.
- ג. אם $L = \infty$ ואם האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אז גם האינטגרל $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס.

תרגיל

$$\int_1^\infty \frac{dx}{2x + \sqrt[3]{x^2 + 1} + 5}$$

בדוק התכנסות/התבדרות

פתרון

הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2x + \sqrt[3]{x^2 + 1} + 5}$ פונקציה חיובית לכל x בקטע $[1, \infty)$ ולכן נשתמש במבחן המנה.

$$\text{נסמן } g(x) = \frac{1}{x} \text{ ונשים לב ש } \int_1^\infty g(x)dx \text{ מתבדר.}$$

נשתמש במבחן ההשוואה השני.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sqrt[3]{x^2 + 1} + 5}{x} = 2$$

ולכן גם $\int_1^\infty \frac{dx}{2x + \sqrt[3]{x^2 + 1} + 5}$ מתבדר.

מבחן דריכלה

תהיינה f, g פונקציות רציפות בקטע $[a, \infty)$ כך שמתקיים:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

2. פונקצית הנגזרת f' רציפה בקטע.

$$3. \text{ הפונקציה } G(x) = \int_a^x g(t)dt \text{ חסומה.}$$

$$\text{אזי } \int_a^\infty f(x)g(x)dx \text{ מתכנס.}$$

הערה

מבחן דריכלה מתאים גם לפונקציות שמקבלות ערכים חיוביים ושלייליים בשונה ממבחני ההשוואה הקודמים.

תרגיל

$$\int_1^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx$$

בדוק התכנסות של

פתרון

נשתמש במבחן דיריכלה.

$$\text{נסמן } f(x) = \sin x \text{ ; } g(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \text{ ונבדוק את התנאים של מבחן דיריכלה.}$$

$$\left| \int_0^x f(t)dt \right| = |1 - \cos x| \leq 2$$

לכל x מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

כדי להוכיח שפונקציה $g(x)$ מונוטונית יורדת נחשב את הנגזרת $g'(x)$

$$g'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

התנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ולכן האינטגרל מתכנס.
לכל $x > 1$, $g'(x) < 0$, לכן $g(x)$ יורדת החל מ $x > 1$.

הערה

ראינו שאחת מתכונות האינטגרל $\int_a^b |f(x)| dx$ היא $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

ממבחן ההשוואה נקבל שאם $\int_a^\infty |f(x)| dx$ מתכנס אז $\left| \int_a^\infty f(x) dx \right|$ מתכנס ולכן $\int_a^\infty f(x) dx$ מתכנס.