הרצאה 9

אינטגרלים לא אמיתיים מסוג שני

תהיי $f(x)$ פונקציה מוגדרת ולא חסומה בקטע חצי פתוח $[a,b)$ ונניח שלכל $\varepsilon>0$, $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b-\varepsilon]$, כך ש $\lim_{x\to b^-} f(x)=\pm\infty$. לכל $\varepsilon>0$ האינטגרל בקטע $[a,b-\varepsilon]$ קיים ולכן נוכל להגדיר את $I(\varepsilon)=\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

הגדרה

הגבול $I=\lim_{\varepsilon\to 0^+} I(\varepsilon)$ נקרא האינטגרל הלא אמיתי של $f(x)$ בקטע $[a,b)$ ומסומן ע"י $I=\int_a^b f(x)dx$.

אם הגבול קיים נאמר כי האינטגרל הלא אמיתי של $f(x)$ בקטע $[a,b)$ מתכנס. אחרת נאמר כי הוא מתבדר.

הערה

באופן דומה ניתן להגדיר את האינטגרל הלא אמיתי בקטע $(a,b]$.

דוגמאות

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ אינטגרל לא אמיתי מסוג שני מכיוון שהפונקציה $\frac{1}{\sqrt{x}}$ אינטגרבילית בקטע $[0+\varepsilon,1]$ לכל $\varepsilon>0$ ובנוסף $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

2. $\int_{\frac{1}{2}}^{e} \frac{dx}{x\ln x}$ אינטגרל לא אמיתי מסוג שני מכיוון שהפונקציה $\frac{1}{x\ln x}$ לא מוגדרת עבור $x=1$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{e} \frac{dx}{x\ln x}=\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x\ln x}+\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\ln x}.$$

האינטגרל $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x\ln x}$ לא אמיתי מכיוון שהפונקציה $\frac{1}{x\ln x}$ אינטגרבילית בקטע $\left[\frac{1}{2},1-\varepsilon\right]$ לכל $\varepsilon>0$ ובנוסף $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$.

האינטגרל $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\ln x}$ לא אמיתי מכיוון שהפונקציה $\frac{1}{x\ln x}$ אינטגרבילית בקטע $[1+\varepsilon,e]$ לכל $\varepsilon>0$ ובנוסף $\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$.

סה"כ האינטגרל $\int_{\frac{1}{2}}^{e} \frac{dx}{x\ln x}$ לא אמיתי מסוג שני.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$ לא אמיתי מכיוון שהפונקציה $\tan x$ אינטגרבילית בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$ לכל $\varepsilon>0$ ובנוסף $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=+\infty$ ולכן האינטגרל לא אמיתי מסוג שני.

תרגיל

לאילו ערכים של הפרמטר p האינטגרל $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ מתכנס.

פתרון

עבור $p>1$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{-p}{x^{p-1}\cdot(1-p)}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{-p}{1^{p-1}\cdot(1-p)}+\frac{p}{a^{p-1}\cdot(1-p)}\right] = \frac{-p}{(1-p)} - \lim_{a\to 0^+}\frac{p}{a^{p-1}\cdot(1-p)}$$

מכיוון ש $p>1$ נקבל ש $\lim_{a\to 0^+}\left[\frac{-p}{a^{p-1}\cdot(1-p)}\right]=\infty$ ואז האינטגרל הלא אמיתי מתבדר.

עבור $p=1$ נקבל

$$\int_a^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0^+}\left[\ln x\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+}\left[\ln 1-\ln a\right] = \ln 1-\lim_{a\to 0^+}\ln a.$$

מכיוון שהגבול $\lim_{a\to 0^+}\ln a$ לא סופי נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי מתבדר.

עבור $p<1$.

$$\int_a^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{-p}{x^{p-1}\cdot(1-p)}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{-p}{1^{p-1}\cdot(1-p)}+\frac{p}{a^{p-1}\cdot(1-p)}\right] = -\frac{p}{(1-p)} - \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{-p}{a^{p-1}\cdot(1-p)}\right]$$

מכיוון ש $p<1$ נקבל ש $\lim_{a\to 0^+}\left[\frac{-p}{b^{p-1}\cdot(1-p)}\right]=0$ ואז האינטגרל הלא אמיתי מתכנס.

מבחן השוואה

יהיו $f(x)$ ו $g(x)$ שתי פונקציות $0\le g(x)\le f(x)$ לכל x בקטע $[a,b]$. אזי

א. אם האינטנגרל $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס אז גם האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

אם האינטגרל $\int_a^\infty g(x)dx$ מתבדר אז גם האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר.

מבחן המנה

בהינתן $f(x)$ ו $g(x)$ פונקציות אי שליליות בקטע $[a,b]$, ונניח שקיים הגבול $L=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ אזי

א. אם $0<L<\infty$ אז שני האינטגרלים $\int_a^b f(x)dx$ ו $\int_a^b g(x)dx$ מתכנסים ביחד או מתבדרים ביחד.

ב. אם $L=0$ ואם האינטגרל $\int_a^b g(x)dx$ מתכנס אז גם האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס.

ג. אם $L=\infty$ ואם האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס אז גם האינטגרל $\int_a^b g(x)dx$ מתכנס.

תרגיל

האם קיים האינטגרל הלא אמיתי $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$?

פתרון

נשתמש במבחן ההשוואה מנה $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$: $\frac{1}{\sqrt{\sin x}} : \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}}$ בנוסף מתקיים $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}} = 1$.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ מתכנס ולכן גם $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$.