תרגול 10

התכנסות נקודתית

הגדרה

סדרה $\{f_n(x)\}$ של פונקציות, היא התאמה, שבה לכל n טבעי מתאימה פונקציה $f_n(x)$.

לכל x_0 שנציב, מתקבלת סדרת מספרים: $\{f_n(x_0)\}$. אם $\{f_n(x_0)\}$ מתכנסת, אז נאמר שסדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}$ מתכנסת נקודתית ב- x_0 .

אם לכל $x_0 \in I$, $\{f_n(x)\}$ מתכנסת נקודתית, אז נאמר ש- $\{f_n(x)\}$ מתכנסת נקודתית בקטע I .

התכנסות במידה שווה

הגדרה

תהא $\{f_n(x)\}$ סדרת פונקציות המוגדרת בקטע I . נאמר כי $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה בקטע I אם לכל $0<\varepsilon$ קיים n_0 טבעי כך שלכל $n_0<n$ ולכל $x \in I$ מתקיים $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$.

תרגיל

הוכיחו בעזרת הגדרה שסדרת הפונקציות $f_n(x)=\left(1+\frac{1}{n}\right)x^2$ בקטע $[0,1]$ מתכנסת במידה שווה.

פתרון

פונקציית הגבול היא: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x^2 = x^2$ לכל x בקטע $[0,1]$.

כלומר סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית בקטע $[0,1]$.

נבדוק התכנסות במידה שווה: לכל $x \in [0,1]$ מתקיים

$\left|f_n(x)-f(x)\right|=\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2-x^2\right|=\frac{\left|x^2\right|}{n}\le\frac{1}{n}$ ולכן לכל $0<\varepsilon$ נוכל לקחת $n_0=\frac{1}{\lfloor\varepsilon\rfloor}$ ולקבל שלכל $x\in[0,1]$ ולכל $n_0<n$ מתקיים $\left|f_n(x)-f(x)\right|\le\frac{1}{n}<\frac{1}{n_0}=\frac{1}{\cancel{1}/\lfloor\varepsilon\rfloor}\le\frac{1}{\cancel{1}/\varepsilon}=\varepsilon$.

קיבלנו ש n_0 תלוי רק ב ε ולא ב x ולכן $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה לפונקציית הגבול בקטע $[0,1]$.

משפט (מבחן ה $\lim-\sup$):

סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה ל $f(x)$ בקטע I , אם ורק אם $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sup\limits_{n\in I}\{\left|f_n(x)-f(x)\right|\}\right]=0$.

תרגיל

בדוק התכנסות של סדרת הפונקציות: $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ בקטע $[0,1]$.

פתרון

נמצא את הפונקציה הגבולית: לכל $x\in[0,1]$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx_0}{1+n^2x_0^2}=0$.

קיבלנו פונקציה רציפה, ולכן לא ניתן לשלול בשלב זה את ההתכנסות במ"ש של הסדרה.

נבדוק על פי מבחן ה $\lim-\sup$: $\sup\limits_{x\in[0,1]}\{|f_n(x)-f(x)|\}=\sup\limits_{x\in[0,1]}\left\{\dfrac{nx}{1+n^2x^2}\right\}$.

ההפרש הוא פונקציה רציפה בקטע סגור ולכן ה $\sup$ הוא גם מקסימום. נגזור ונשווה לאפס.

$\left(\dfrac{nx}{1+n^2x^2}\right)'=\dfrac{n(1+n^2x^2)-2n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2}=\dfrac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$. הנגזרת מתאפסת בקטע $[0,1]$ רק כאשר $x=\dfrac{1}{n}$. $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2},\ f_n(0)=0,\ f_n(1)=\dfrac{n}{1+n^2}\le\dfrac{1}{2}$ ז"א $\sup\limits_{x\in[0,1]}\left\{\dfrac{nx}{1+n^2x^2}\right\}=\dfrac{1}{2}\neq 0$.

כלומר: הסדרה אינה מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,1]$.

תרגיל

הוכח או הפרך: $\{f_n(x)\}$ מתכנס במ"ש בקטע I $\Leftarrow$ הפונקציה הגבולית $f(x)$ חסומה ב I.

פתרון

לא נכון. למשל: $f_n(x)=\dfrac{1}{x}$ בקטע $(0,1)$. פונקצית הגבול היא $\dfrac{1}{x}$ ואינה חסומה בקטע $(0,1)$.

סדרת הפונקציות מתכנסת במידה שווה.

תרגיל

מהי פונקציית הגבול של $f_n(x)=\frac{x+n}{x^2+3n^2}$ ב R? האם ההתכנסות היא במידה שווה?