תרגול 11

טורי פונקציות

הגדרה

תהא $f_n(x)$ סדרת פונקציות המוגדרת בקטע I. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ נקרא טור פונקציות.

נשים לב שבכל נקודה $x_0 \in I$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ הוא טור מספרים.

תרגיל

החליטו אם טורי הפונקציות הבאים מתכנסים נקודתית, במ"ש או מתבדרים בתחומים הנתונים:

א. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$ בתחום $(-a,a)$.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{e^{nx}}$ בתחום $[0,\infty)$.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ בתחום $[0,\infty)$.

פתרון

סעיף א

נוכיח תחילה ש $\ln(1+x) \le x$ בתחום $[0,\infty)$.

נחקור את הפונקציה $f(x)=x-\ln(1+x) \Leftarrow f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$ ז"א הנגזרת חיובית לכל x בתחום $[0,\infty)$. $f(0)=0$ ואז $f(x)\ge 0$ לכל x בתחום $[0,\infty)$.

סה"כ נקבל ש $\frac{a^2}{n\ln^2 n} \le \frac{x^2}{n\ln^2 n} \le \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$.

ממבחן העיבוי נקבל שהטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^2}{n\ln^2 n}$ מתכנס ולכן טור הפונקציות שלנו מתכנס במ"ש בקטע לפי מבחן ה M של ויירשטראס.

סעיף ב

ננסה למצוא מקסימום לפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{e^{nx}}$. אם נגזור נקבל $f'(x)=\frac{2xe^{nx}-nx^2e^{nx}}{e^{2nx}}$.

נשווה לאפס ונקבל ש $2x-nx^2=0 \Leftarrow x=0, x=\frac{2}{n}$.

$f'(x)=\frac{2x-nx^2}{e^{nx}}$ נגזור פעם שנייה את המונה בלב כדי לבחון חיוביות נגזרת שנייה בנקודה

קריטית ונקבל $2-2nx$ ועבור $x=\frac{2}{n}$ נקבל שהנגזרת השנייה שלילית ז"א שעבור $x=\frac{2}{n}$ ערך

הפונקציה

הוא מקסימאלי (מכיוון שהפונקציה רציפה ואין נקודות קיצון נוספות).

$\frac{4}{n^2e^2}\le\frac{x^2}{e^{nx}}$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2e^2}$ מתכנס, טור הפונקציות מתכנס במ"ש לפי מבחן ה M של

ווירשטראס.

<u>משפט</u>

אם $\{f_n(x)\}$ פונקציות רציפות ומתכנסות במידה שווה בקטע I,

אז פונקצית הגבול $f(x)$ רציפה בקטע I.

<u>תרגיל</u>

החליטו אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}$ בתחום $[0,\infty)$. מתכנס נקודתית, במ"ש או מתבדר.

<u>פתרון</u>

נשים לב שאם $x>0$ אז $\frac{1}{1+x^2}<1$ ולכן $\frac{1}{x}=x\cdot\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1-\frac{1}{1+x^2}}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}$.

הטור מתכנס נקודתית ל $\frac{1}{x}$ כאשר $x>0$.

כאשר $x=0$ הטור מתכנס נקודתית ל 0. סה"כ הטור מתכנס נקודתית לפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}.$$

היות והפונקציות $\frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}$ רציפות והן מתכנסות נקודתית לפונקציה לא רציפה, ההתכנסות לא

במ"ש.

<u>תרגיל</u>

עבור הטורים הבאים קבע לאילו ערכי x הטור מתכנס בתנאי\בהחלט

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdot\ldots\cdot(1+x^n)}$.

פתרון

סעיף א

עבור $x>0$: $1-\frac{2x}{1+x}=\frac{1+x-2x}{1+x}=\frac{1-x}{1+x}\Leftarrow 1>\frac{1-x}{1+x}$

$-1+\frac{2}{1+x}=\frac{-1-x+2}{1+x}=\frac{1-x}{1+x}\Leftarrow -1<\frac{1-x}{1+x}$.

סה"כ קיבלנו ש $1>\frac{1-x}{1+x}>-1$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ מתכנס כטור גיאומטרי.

מכיוון ש $\left|\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right|\le\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right|$ נקבל שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right|$ מתכנס.

ז"א הטור שלנו מתכנס בהחלט.

עבור $x<0$: $\frac{2}{1+x}+1-=\frac{-1-x+2}{1+x}=\frac{1-x}{1+x}$.

אם $0>x>-1$: $1<\frac{2}{1+x}+1-$ עבור $-1>x$ $-1>\frac{2}{1+x}+1-$.

סה"כ נקבל $1<\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$. $1<\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\xleftarrow{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right|}$ וממבחן השורש הטור מתבדר.

עבור $x=0$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ הטור מתכנס בתנאי. על פי לייבניץ.

סעיף ב

$$a_n=\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdot\ldots\cdot(1+x^n)},\ a_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(1+x)(1+x^2)\cdot\ldots\cdot(1+x^n)(1+x^{n+1})}\Rightarrow\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{x}{1+x^{n+1}}\right|$$

סה"כ נקבל שלכל $x\neq-1$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ ולכן הטור מתכנס בהחלט לכל $x\neq-1$.

הגדרה

טור חזקות סביב a הוא טור פונקציות מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-a)^n$.

משפט

לכל טור חזקות קיים מספר אי שלילי R, כך שלכל $x-a<R$ הטור מתכנס ולכל $x-a>R$ הטור מתבדר. ל R קוראים רדיוס ההתכנסות של הטור. אם הטור מתכנס בכל הישר נכתוב $R=\infty$, ואם $R=0$ אז הטור מתכנס רק עבור $x=a$.

<u>דוגמא</u>

ראינו שטור החזקות סביב 0 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ מתכנס בתחום $(-1,1)$ בלבד, ולכן במקרה זה $R=1$.

<u>תכונות חשובות</u>

1. בתחום $(-R+a,R+a)$ הטור מתכנס בהחלט.
2. הטור יכול להתכנס בתנאי רק באחד מקצות הקטע.

<u>נוסחת קושי אדמרד</u>

רדיוס ההתכנסות של טור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$ הוא $R=\frac{1}{\varlimsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}}$.

<u>נוסחת דלמבר</u>

רדיוס ההתכנסות של טור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$ הוא $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

<u>שאלה 6</u>

מצא את תחום ההתכנסות עבור טורי החזקות הבאים:

א. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+5}{4n^2+n}\left(\frac{x}{3}\right)^n$.

ב. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{8^n\sqrt{n}}(x-2)^{3n}$.

<u>פתרון שאלה 6</u>

<u>סעיף א</u>

נמצא תחילה את רדיוס ההתכנסות $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n+5}{3^n\left(4n^2+n\right)}}=\frac{1}{3}$ ולכן רדיוס ההתכנסות הוא 3.

נבדוק את התכנסות הטור בקצוות:

עבור $x=3$ נקבל את הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+5}{4n^2+n}$. הטור חיובי וניתן להשתמש במבחן השוואה השני.

הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר. $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+5}{4n^2+n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n}{4n^2+n}=\frac{1}{4}$ הטורים חברים.

הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+5}{4n^2+n}$ מתבדר.

עבור $x=-3$ נקבל את הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+5)}{4n^2+n}$.

הטור הוא טור מתחלף כאשר $a_n=\frac{n+5}{4n^2+n}$. a_n סדרה יורדת ובנוסף מתקיים $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

תנאי משפט לייבניץ מתקיימים והטור מתכנס.

תחום ההתכנסות הוא: $-3\le x<3$.

<u>סעיף ב</u>

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{8^n\sqrt{n}}(x-2)^{3n}$$

נמצא תחילה את רדיוס ההתכנסות ולכן רדיוס ההתכנסות הוא 2 ז"א הטור מתכנס כאשר $|x-2|<2 \Leftarrow 0<x<4$.

נבדוק את התכנסות הטור בקצוות:

עבור $x=4$ נקבל $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. לכל $3\le n$ מתקיים $\frac{\ln n}{\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$. הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ מתבדר ולכן גם הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ מתבדר.

עבור $x=0$ נקבל $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n}}$.

הטור הוא טור מתחלף כאשר $a_n=\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. נשים לב ש $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

נוכיח ש a_n סדרה יורדת.

$$f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}.$$

לכל $e^2<x$ הנגזרת שלילית והפונקציה יורדת ז"א לכל $9\le n$ הסדרה $a_n=\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ יורדת.

תנאי משפט לייבניץ מתקיימים והטור מתכנס.

תחום ההתכנסות הוא: $0\le x<4$.