תרגול 12

שאלה 1

עבור הפונקציות הבאות מצא פיתוח מקלורן עד לסדר 3.

א. $f(x)=\tan x$.

ב. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

ג. $f(x)=\ln(x+e)$.

פתרון שאלה 1

סעיף א

נחשב את $f(0), f'(0), f''(0), f^{(3)}(0)$.

$f(x)=\tan x \Rightarrow f(0)=0$.

$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow f'(0)=1$.

$$f'(x)=(\cos x)^{-2} \Rightarrow f''(x)=2\sin x(\cos x)^{-3} \Rightarrow f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x} \Rightarrow f''(0)=0$$

$$f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x} \Rightarrow f^{(3)}(x)=\frac{2\cos x\cdot\cos^3 x-2\sin x\cdot 3\cos^2 x\cdot(-\sin x)}{\cos^6 x} \Rightarrow f^{(3)}(x)=2 .$$

הפולינום המבוקש הוא $P_3(x)=x+\frac{x^3}{3}$.

סעיף ב

נחשב את $f(0), f'(0), f''(0), f^{(3)}(0)$.

$f(x)=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow f(0)=1$.

$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f'(0)=0$.

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f''(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \Rightarrow f''(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f''(0)=1$$

הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ היא פונקציה זוגית, ולכן $f^{(3)}(0)=0$.

הפולינום המבוקש הוא: $P_2(x)=1+\frac{x^2}{2}$.

סעיף ג

נחשב את $f(0), f'(0), f''(0), f^{(3)}(0)$.

$f(x)=\ln(x+e) \Rightarrow f(0)=1$.

$f'(x)=\frac{1}{x+e} \Rightarrow f'(0)=\frac{1}{e}$.

$f''(x)=\frac{-1}{(x+e)^2} \Rightarrow f''(0)=\frac{-1}{e^2}$.

$f^{(3)}(x)=\frac{2}{(x+e)^3} \Rightarrow f^{(3)}(0)=\frac{2}{e^3}$.

הפולינום המבוקש הוא: $P_3(x)=1+\frac{x}{e}-\frac{x^2}{2e^2}+\frac{x^3}{3e^3}$

<u>שאלה 2</u>

עבור הפונקציות הבאות מצא פיתוח טיילור מסדר 3 סביב הנקודה הנתונה.

א. $f(x)=\ln x$ $\quad x_0=1$.

ב. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $\quad x_0=1$.

ג. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ $\quad x_0=8$.

<u>פתרון שאלה 2</u>

<u>סעיף א</u>

נחשב את $f(1), f'(1), f''(1), f^{(3)}(1)$.

$f(x)=\ln x \Rightarrow f(1)=0$.

$f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(1)=1$.

$f'(x)=\dfrac{1}{x} \Rightarrow f''(x)=-\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1)=-1$.

$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f^{(3)}(x)=\dfrac{2}{x^3} \Rightarrow f^{(3)}(1)=2$.

$P_3(x)=(x-1)-\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{(x-1)^3}{3}$.

<u>סעיף ב</u>

נחשב את $f(1), f'(1), f''(1), f^{(3)}(1)$.

$f(x)=\dfrac{1}{x} \Rightarrow f(1)=1$.

$f(x)=\dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f'(1)=-1$.

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x)=\dfrac{2}{x^3} \Rightarrow f''(1)=2$.

$f''(x)=\dfrac{2}{x^3} \Rightarrow f^{(3)}(x)=\dfrac{-6}{x^4} \Rightarrow f^{(3)}(1)=-6$.

$P_3(x)=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3$.

<u>סעיף ג</u>

נחשב את $f(8), f'(8), f''(8), f^{(3)}(8)$.

$f(x)=x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f(8)=2$.

$f(x)=x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow f'(8)=\dfrac{1}{12}$.

$f'(x)=\dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow f''(x)=\dfrac{-2}{9x^{\frac{5}{3}}} \Rightarrow f''(8)=\dfrac{-1}{144}$.

$f''(x)=\dfrac{-2}{9x^{\frac{5}{3}}} \Rightarrow f^{(3)}(x)=\dfrac{10}{27x^{\frac{8}{3}}} \Rightarrow f^{(3)}(8)=\dfrac{5}{3456}$.

$$. P_3(x)=2+\frac{1}{12}(x-8)-\frac{1}{144}(x-8)^2+\frac{5}{3456}(x-8)^3$$

<u>שאלה 3</u>

בעזרת פיתוח פונקציות לטור טיילור חשב את $\sqrt[3]{9}$ עד לקירוב של 0.01. (היעזר בשארית לגראנז' כדי לקבוע מהו סדר של הפולינום שיש לפתח כדי לקבל את הקירוב הדרוש)

<u>פתרון שאלה 3</u>

<u>תזכורת - משפט לגרנז'</u>

נניח ש $P_n(x)$ פולינום טיילור מסדר n של פונקציה $f(x)$ בנקודה a אז קיימת נקודה $a<c<x$

כך ש $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

נחשב את שארית לגראנז' $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^n$, מכיוון שמדובר בפולינום טיילור סביב

$x_0=8$ נקבל ש $a=8$. $\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}=R_n(9)=\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(9-8)^n$ כאשר $8<c<9$.

$$. R_1(9)=\frac{f''(c)}{2!}=\left|\frac{-2}{9\cdot c^{\frac{5}{3}}\cdot 2!}\right|\leq\frac{1}{9\cdot 8^{\frac{5}{3}}}=\frac{1}{288}$$

הדיוק הדרוש הוא $\frac{1}{100}$.

מספיק לחשב את פולינום טיילור עד לסדר 1. $P_1(x)=2+\frac{1}{12}(x-8)=\frac{1}{12}x+\frac{4}{3}$.

נשים לב: $P_1(9)=2.083333...$, $\sqrt[3]{9}=2.08008...$.

אכן השגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$.

<u>שאלה 4</u>

מצא טור מקלורן אינסופי לפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3\sin 2x$.

ב. $f(x)=\cos^2 x$.

ג. $f(x)=e^{x^2}$.

<u>פתרון שאלה 4</u>

<u>סעיף א</u>

ראינו ש $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ ולכן

$$\sin 2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot(2x)^{2n+1} \Leftarrow x^3\sin 2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+4} .$$

<u>סעיף ב</u>

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1 \Leftarrow \cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x .$$

ראינו ש

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} \Leftarrow \cos 2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n} \Leftarrow \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

סה"כ קיבלנו ש $\cos^2 x=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$.

<u>סעיף ג</u>

ראינו ש $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ ולכן $e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$.

<u>שאלה 5</u>

א. רשום את הפונקציה $\frac{1}{1-x^2}$ כטור חזקות.

ב. רשום את הפונקציה $\ln\frac{1+x}{1-x}$ כטור חזקות (הדרכה: חשב את הנגזרת של $\ln\frac{1+x}{1-x}$ והשתמש בסעיף קודם).

ג. הצג $\ln 7$ כטור אינסופי.

<u>פתרון שאלה 5</u>

<u>סעיף א</u>

סכום סדרה הנדסית אינסופית שמנתה q כך ש $-1<q<1$ הוא $\frac{a_1}{1-q}$ ולכן

$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ בתחום $-1<x<1$ ולכן $\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$ בתחום $-1<x<1$.

<u>סעיף ב</u>

נחשב טור טיילור עבור $\ln\frac{1+x}{1-x}$. $\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)'=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{2}{(1-x)^2}\cdot\frac{1-x}{1+x}=\frac{2}{1-x^2}$.

ראינו ש $\frac{2}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}2x^{2n}$ ומכיוון ש $\int\frac{2}{1-x^2}dx=\ln\frac{1+x}{1-x}$ נקבל $\ln\frac{1+x}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$.

<u>סעיף ג</u>

$\frac{1+x}{1-x}=7 \Rightarrow 1+x=7-7x \Rightarrow 8x=6 \Rightarrow x=\frac{3}{4}$.

מסעיף ב $\ln\frac{1+x}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \Rightarrow \ln 7=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot 3^{2n+1}}{4^{2n+1}\cdot(2n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{4n+1}\cdot(2n+1)}$