

תרגול 13

שאלה 1

פתרו בעזרת שיטת הפרדת המשתנים את המשוואות הבאות:

א. $2ydx - xdy = 0$

ב. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}$

ג. $y' = \cos^2 x \cos^2 2y$

ד. $(xy + x)dx = (x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1)dy$

פתרון שאלה 1

סעיף א

$$y = \frac{x^2}{c} \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \ln(cy) \Leftrightarrow \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2y} dy \Leftrightarrow 2ydx = xdy \Leftrightarrow 2ydx - xdy = 0$$

סעיף ב

$$\frac{y^2}{2} + e^y = \frac{x^2}{2} + e^{-x} + c \Leftrightarrow (y + e^y)dy = (x - e^{-x})dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}$$

סעיף ג

$$\frac{1}{2} \tan 2y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c \Leftrightarrow \frac{dy}{\cos^2 2y} = \cos^2 x dx \Leftrightarrow y' = \cos^2 x \cos^2 2y$$

סעיף ד

$$\frac{xdx}{x^2 + 1} = \frac{(y^2 + 1)dy}{y + 1} \Leftrightarrow x(y + 1)dx = (x^2 + 1)(y^2 + 1)dy \Leftrightarrow (xy + x)dx = (x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1)dy$$

נחשב $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$ נציב $t = x^2$ $dt = 2xdx \Leftrightarrow t = x^2$

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{2(t + 1)} dt = \frac{1}{2} \ln|t + 1| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

נחשב $\int \frac{(y^2 + 1)dy}{y + 1}$

$$\frac{y^2 + 1}{y + 1} = \frac{(y + 1)^2 - 2(y + 1) + 2}{y + 1} = y + 1 - 2 + \frac{2}{y + 1} = y - 1 + \frac{2}{y + 1}$$

$$\int \frac{(y^2 + 1)dy}{y + 1} = \int \left(y - 1 + \frac{2}{y + 1} \right) dy = \frac{y^2}{2} - y + 2 \ln|y + 1|$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) = \frac{y^2}{2} - y + 2 \ln|y + 1| + c$$

שאלה 2

פתרו את המשוואות ההומוגניות הבאות:

א. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$

ב. $(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2dy = 0$

ג. $2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$

ד. $y' = \frac{(1 + y)^2}{x(y + 1) - x^2}$

פתרון שאלה 2

סעיף א

נציב $y = ux$ ואז $y' = u'x + u$

$$\frac{2udu}{1+u^2} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow u'x = \frac{1+u^2}{2u} \Leftrightarrow u'x+u = \frac{1+3u^2}{2u} \Leftrightarrow u'x+u = \frac{x^2+3u^2x^2}{2x \cdot ux}$$

$$1 + \frac{y^2}{x^2} = cx \Leftrightarrow \ln(1+u^2) = \ln(cx)$$

סעיף ב

נציב $y = ux$ ואז $y' = u'x + u$

$$y' = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2}$$

$$u'x = 1 + 2u + u^2 \Leftrightarrow u'x + u = 1 + 3u + u^2 \Leftrightarrow u'x + u = \frac{x^2 + 3x \cdot ux + u^2x^2}{x^2}$$

$$-\frac{x}{x+y} = \ln cx \Leftrightarrow -\frac{1}{1+\frac{y}{x}} = \ln cx \Leftrightarrow -\frac{1}{1+u} = \ln cx \Leftrightarrow \frac{du}{(1+u)^2} = \frac{dx}{x}$$

סעיף ג

נציב $y = ux$ ואז $y' = u'x + u$

$$2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$$

$$u'x = \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{2}u \Leftrightarrow u'x + u = \frac{1}{2}u^3 + \frac{3}{2}u \Leftrightarrow u'x + u = \frac{u^3x^3 + 3ux \cdot x^2}{2x^3} \Leftrightarrow y' = \frac{y^3 + 3yx^2}{2x^3}$$

$$\frac{2du}{u^3+u} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{2}{u \cdot (u^2+1)} = \frac{2}{u} - \frac{2u}{u^2+1}$$

$$\int \frac{2du}{u^3+u} = \int \frac{2du}{u} - \int \frac{2udu}{u^2+1} = \ln u^2 - \ln(u^2+1) = \ln \frac{u^2}{u^2+1}$$

$$\frac{y^2}{y^2+x^2} = cx \Leftrightarrow \frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y^2}{x^2}+1} = cx \Leftrightarrow \ln \frac{u^2}{u^2+1} = \ln cx \Leftrightarrow \int \frac{2du}{u^3+u} = \int \frac{dx}{x}$$

סעיף ד

$$y' = \frac{(1+y)^2}{x(y+1)-x^2}$$

נציב $t = 1+y$

$$t' = \frac{t^2}{xt-x^2}$$

נציב $t = ux$ ואז $t' = u'x + u$

$$\frac{(u-1)du}{u} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow u'x = \frac{u}{u-1} \Leftrightarrow u'x+u = \frac{u^2}{u-1} \Leftrightarrow u'x+u = \frac{u^2x^2}{x \cdot ux - x^2}$$

$$\frac{e^u}{u} = cx \Leftrightarrow \ln \frac{e^u}{u} = \ln cx \Leftrightarrow u - \ln u = \ln cx \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \frac{dx}{x}$$

הצבנו $t = 1 + y$, $t = ux$ ז"א $u = \frac{1+y}{x}$.

הפתרון הוא $cx = \frac{xe^{\frac{1+y}{x}}}{1+y}$.

שאלה 3

פתרו את המשוואות הליניאריות הבאות:

א. $y' + \frac{1}{x}y = 3\cos(2x)$

ב. $y' + 3y = x + e^{-2x}$

ג. $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x^2}$

ד. $y' = \frac{y}{3x - y^2}$

פתרון שאלה 3

סעיף א

נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית המתאימה $y' + \frac{1}{x}y = 0$.

$y = \frac{c}{x} \Leftrightarrow \ln y = -\ln x + \ln c \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 0$

נמצא פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית נציב במשוואה $y' + \frac{1}{x}y = 3\cos(2x)$ $y = \frac{c(x)}{x}$

$c'(x) = 3x \cos 2x \Leftrightarrow \frac{xc'(x) - c(x)}{x^2} + \frac{c(x)}{x^2} = 3\cos(2x)$

נפתור את האינטגרל $\int 3x \cos 2x dx$ בעזרת אינטגרציה בחלקים

$$\int 3x \cos 2x dx = \frac{3x \sin 2x}{2} - \int \frac{3 \sin 2x}{2} dx = \frac{3x \sin 2x}{2} + \frac{3 \cos 2x}{4} \quad \begin{matrix} v = \frac{1}{2} \sin 2x & u = 3x \\ v' = \cos 2x & u' = 3 \end{matrix}$$

סה"כ קיבלנו ש $c(x) = \frac{3x \sin 2x}{2} + \frac{3 \cos 2x}{4}$ והפתרון הפרטי של המשוואה הלא הומוגנית

פתרון כללי של הלא הומוגנית $y_p = \frac{3 \sin 2x}{2} + \frac{3 \cos 2x}{4x}$ $y = \frac{c}{x} + \frac{3 \sin 2x}{2} + \frac{3 \cos 2x}{4x}$

סעיף ב

נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית המתאימה $y' + 3y = 0$.

$y = \frac{c}{e^{3x}} \Leftrightarrow \ln y = -3x + \ln c \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -3dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + 3y = 0$

נמצא פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית נציב במשוואה $y' + 3y = x + e^{-2x}$ $y = \frac{c(x)}{e^{3x}}$

$c'(x) = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + e^x \Leftrightarrow c'(x) = xe^{3x} + e^x \Leftrightarrow \frac{c'(x)}{e^{3x}} + \frac{-3c(x)}{e^{3x}} + \frac{3c(x)}{e^{3x}} = x + e^{-2x}$

הפתרון הפרטי של המשוואה הלא הומוגנית $y_p = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} + e^{-2x}$

פתרון כללי של הלא הומוגנית $y = \frac{c}{e^{3x}} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} + \frac{1}{e^{2x}}$

סעיף ג

נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית המתאימה $y' + \frac{2}{x}y = 0$.

$$y = \frac{c}{x^2} \Leftrightarrow \ln y = -2 \ln x + \ln c \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{2dx}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 0$$

נמצא פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית נציב במשוואה $y = \frac{c(x)}{x^2}$ $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x^2}$

$$c(x) = \sin x \Leftrightarrow c'(x) = \cos x \Leftrightarrow \frac{x^2 c'(x) - 2xc(x)}{x^4} + \frac{2c(x)}{x^3} = \frac{\cos x}{x^2}$$

הפתרון הפרטי של המשוואה הלא הומוגנית $y_p = \frac{\sin x}{x^2}$. פתרון כללי של הלא הומוגנית

$$y = \frac{c}{x^2} + \frac{\sin x}{x^2}$$

סעיף ד

$$x' - \frac{3}{y}x = -y \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{3x - y^2}{y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{3x - y^2} \Leftrightarrow y' = \frac{y}{3x - y^2}$$

נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית המתאימה $x' - \frac{3}{y}x = 0$.

$$x = cy^3 \Leftrightarrow \ln x = 3 \ln y + \ln c \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{3dy}{y} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{3x}{y}$$

נמצא פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית נציב במשוואה $x = c(y)y^3$ $x' - \frac{3}{y}x = -y$

$$c(y) = \frac{1}{y} \Leftrightarrow c'(y) = -\frac{1}{y^2} \Leftrightarrow c'(y)y^3 + 3c(y)y^2 - 3c(y)y^2 = -y$$

הפתרון הפרטי של המשוואה הלא הומוגנית $y_p = \frac{1}{y}$. פתרון כללי של הלא הומוגנית $x = cy^3 + \frac{1}{y}$

שאלה 4

פתרו את משוואות ברנולי הבאות:

א. $x^2 y' + 2xy - y^3 = 0$

ב. $y' + 2y = y^2 e^x$

פתרון שאלה 4

סעיף א

$$\frac{x^2 y'}{y^3} + \frac{2x}{y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 y' + 2xy - y^3 = 0$$

$$t' = \frac{-2y'}{y^3} \Leftrightarrow t = \frac{1}{y^2} \text{ נציב}$$

$$t' - \frac{4}{x}t = \frac{-2}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2}t' + 2xt = 1$$

נפתור את המשוואה ההומוגנית $t' - \frac{4}{x}t = 0$ $\Leftrightarrow \frac{dt}{t} = \frac{4}{x}dx \Leftrightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{4}{x}t$

פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית $t = cx^4$

נמצא פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית. נציב $t = c(x)x^4$ במשוואה $t' - \frac{4}{x}t = \frac{-2}{x^2}$

$$c(x) = \frac{2}{5x^5} \Leftrightarrow c'(x) = \frac{-2}{x^6} \Leftrightarrow c'(x)x^4 + 4x^3c(x) - 4x^3c(x) = \frac{-2}{x^2}$$

פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית $t = \frac{2}{5x}$

$$\frac{1}{t} = \frac{5x}{5cx^5 + 2} \Leftrightarrow t = \frac{5cx^5 + 2}{5x} \Leftrightarrow t = cx^4 + \frac{2}{5x}$$

$$y^2 = \frac{5x}{5cx^5 + 2} \text{ : פתרון המשוואה}$$

סעיף ב

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{y} = e^x \Leftrightarrow y' + 2y = y^2 e^x$$

$$t' = \frac{-y'}{y^2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{y} \text{ נציב}$$

$$t' - 2t = -e^x \Leftrightarrow -t' + 2t = e^x$$

נפתור את המשוואה ההומוגנית

$$t = ce^{2x} \Leftrightarrow \ln t = 2x + \ln c \Leftrightarrow \frac{dt}{t} = 2dx \Leftrightarrow \frac{dt}{dx} = 2t \Leftrightarrow t' - 2t = 0$$

פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית $t = ce^{2x}$

נמצא פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית. נציב $t = c(x)e^{2x}$ במשוואה $t' - 2t = -e^x$

$$c(x) = e^{-x} \Leftrightarrow c'(x) = -e^{-x} \Leftrightarrow c'(x)e^{2x} + 2c(x)e^{2x} - 2c(x)e^{2x} = -e^x$$

פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית $t = e^x$

$$y = \frac{1}{ce^{2x} + e^x} \Leftrightarrow t = ce^{2x} + e^x \text{ פתרון כללי של המשוואה הלא הומוגנית}$$

$$y = \frac{1}{ce^{2x} + e^x} \text{ : פתרון המשוואה}$$

שאלה 5

פתרו את בעיות ההתחלה הבאות:

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases} \text{ א.}$$

$$\begin{cases} y^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} dy = \arcsin x dx \\ y(0) = 0 \end{cases} \text{ ב.}$$

$$\begin{cases} (3xy + 3y - 4)dx + (x+1)^2 dy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \text{ ג.}$$

פתרון שאלה 5

סעיף א

$$y^2 = x^2 + c \Leftrightarrow ydy = xdx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow y' = \frac{x}{y} \text{ נמצא פתרון כללי למשוואה}$$

$$y = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 + c}$$

סעיף ב

$$\cdot \frac{y^3}{3} = \frac{\arcsin^2 x}{2} \Leftrightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{\arcsin^2 x}{2} + c \Leftrightarrow y^2 dy = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

טעיה ג

$$y' = \frac{-3xy - 3y + 4}{(x+1)^2} \Leftrightarrow (3xy + 3y - 4)dx = -(x+1)^2 dy \Leftrightarrow (3xy + 3y - 4)dx + (x+1)^2 dy = 0$$

$$y' + \frac{3}{x+1} y = \frac{4}{(x+1)^2} \Leftrightarrow y' = \frac{-3y(x+1) + 4}{(x+1)^2}$$

קיבלנו משוואה הומוגנית.

נמצא תחילה פתרון למשוואה ההומוגנית

$$y = \frac{c}{(x+1)^3} \Leftrightarrow \ln y = -3 \ln(x+1) + \ln c \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-3dx}{x+1} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3y}{x+1} \Leftrightarrow y' + \frac{3}{x+1} y = 0$$

$$\cdot y' + \frac{3}{x+1} y = \frac{4}{(x+1)^2} \text{ במשוואה } y = \frac{c(x)}{(x+1)^3} \text{ נציב}$$

$$\cdot c(x) = 2x^2 + 4x \Leftrightarrow c'(x) = 4x + 4 \Leftrightarrow \frac{c'(x)}{(x+1)^3} - \frac{3c(x)}{(x+1)^4} + \frac{3c(x)}{(x+1)^4} = \frac{4}{(x+1)^2}$$

$$\cdot y = \frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^3} \text{ פתרון פרטי ללא הומוגני}$$

$$\cdot c = 1 \Leftrightarrow y(0) = 1 \text{ נחון ש } y = \frac{2x^2 + 4x + c}{(x+1)^3} \text{ פתרון כללי ללא הומוגני}$$

$$\cdot y = \frac{2x^2 + 4x + 1}{(x+1)^3}$$