תרגול 7

שאלה 1

חשב את האינטגרלים המסוימים הבאים:

א. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x \cdot \sqrt{1-\cos x}dx$.

ב. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin xdx$.

ג. $\int_0^{\pi} \left|\sin x - \cos x\right|dx$.

פתרון שאלה 1

סעיף א

נציב $t = 1-\cos x \quad dt = \sin xdx$.

עבור $x = \frac{3\pi}{2}$ נקבל $t = 1-\cos\frac{3\pi}{2} = 1$.

עבור $x = -\frac{\pi}{2}$ נקבל $t = 1-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x \cdot \sqrt{1-\cos x}dx = \int_1^1 \sqrt{t}dt = 0 \text{ .}$$

סעיף ב

נפתור תחילה בעזרת אינטגרציה בחלקים את $\int \arcsin xdx$.

$$v' = 1 \qquad u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$v = x \qquad u = \arcsin x$$

$$\int \arcsin xdx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \text{ .}$$

נחשב את האינטגרל $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ בשיטת ההצבה.

נציב $t = 1-x^2 \quad dt = -2xdx$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2} \text{ .}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin xdx = \left[x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2} + \sqrt{1-\frac{1}{4}}\right] - 1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 0.1278$$

סעיף ג

נבדוק את החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x) = \sin x - \cos x$.

נבדוק מתי הפונקציה מתאפסת.

$\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ ובתחום $[0,\pi]$

נקבל $x=\frac{\pi}{4}$. מכיוון שהפונקציה $f(x)=\sin x-\cos x$ רציפה, $x=\frac{\pi}{4}$ נקודת חיתוך יחידה עם ציר x, $f(0)<0$ ו $f(\pi)>0$ נקבל שהפונקציה חיובית בקטע $\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$ ושלילית בקטע $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

$$\int_0^{\pi}|\sin x-\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx=[\sin x+\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}+[-\cos x-\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$

$$=\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)-(\sin 0+\cos 0)+(-\cos\pi-\sin\pi)-\left(-\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1+1+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

<u>שאלה 2</u>

הוכח כי $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\le\int_0^2 e^{x^2-x}dx\le 2e^2$.

<u>פתרון שאלה 2</u>

נמצא את המקסימום המוחלק והמינימום המוחלט של הפונקציה $f(x)=x^2-x$.

$f'(x)=2x-1$ והנגזרת מתאפסת רק עבור $x=\frac{1}{2}$.

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4},\ f(0)=0,\ f(2)=2$.

מכיוון שהפונקציה $f(x)=x^2-x$ רציפה בקטע הסגור $[0,2]$ היא מקבלת בקטע את ערכה המקסימאלי והמינימאלי.

הערך המקסימאלי הוא 2 והמינימאלי $-\frac{1}{4}$. מכיוון שהפונקציה $g(x)=e^x$ היא פונקציה עולה נקבל ש $e^{-\frac{1}{4}}\le e^{x^2-x}\le e^2$ לכל x בקטע.

סה"כ נקבל $2e^2=\int_0^2 e^2dx\ge\int_0^2 e^{x^2-x}dx\ge\int_0^2 e^{-\frac{1}{4}}dx=\frac{2}{\sqrt[4]{e}}$.

<u>שאלה 3</u>

חשב את אורך הגרפים של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ בתחום $0\le x\le 1$.

ב. $f(x)=\ln(\cos x)$ בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{4}$.

<u>פתרון שאלה 3</u>

אורך עקום: $L=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

<u>סעיף א</u>

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\Rightarrow(f'(x))^2=\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}\Rightarrow 1+(f'(x))^2=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}$$

סה"כ קיבלנו ש $1+(f'(x))^2=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\Rightarrow\sqrt{1+(f'(x))^2}=\left|\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right|$.

מכיוון ש $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ חיובי לכל x נקבל ש $\left|\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right|=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

$$\int_0^1\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)dx=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^1=\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}\approx 1.175$$

<u>סעיף ב</u>

$$f(x)=\ln(\cos x)\Rightarrow f'(x)=\tan x\Rightarrow (f'(x))^2=\tan^2 x\Rightarrow 1+(f'(x))^2=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

סה"כ קיבלנו ש $\sqrt{1+(f'(x))^2}=\frac{1}{|\cos x|}$. נשים לב שבתחום $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ $\frac{1}{|\cos x|}=\frac{1}{\cos x}$.

נשאר לחשב $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}dx$.

נחשב תחילה את האינטגרל הלא מסוים $\int\frac{1}{\cos x}dx$.

$$\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx+\int\cos x dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx+\sin x$$

נשאר לחשב את $\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx$.

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx=\int\frac{\sin^2 x\cos x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\cdot\cos x dx.$$

נציב $t=\sin x$ ואז $dt=\cos x dx$.

$$\int\frac{t^2}{1-t^2}dt=-\int\frac{1-t^2-1}{1-t^2}dt=-\int 1dt+\int\frac{1}{1-t^2}dt=-t+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t}dt+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-t}dt=-t+\frac{1}{2}\ln|1+t|-\frac{1}{2}\ln|1-t|$$

סה"כ קיבלנו ש

$$\int\frac{1}{\cos x}dx=-\sin x+\frac{1}{2}\ln|1+\sin x|-\frac{1}{2}\ln|1-\sin x|+\sin x=\frac{1}{2}\ln|1+\sin x|-\frac{1}{2}\ln|1-\sin x|$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}dx=\left[\frac{1}{2}\ln|1+\sin x|-\frac{1}{2}\ln|1-\sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\approx 0.881$$