תרגול 8

שאלה 1
בדוק בעזרת חישוב פונקציה קדומה האם האינטגרלים הבאים מתכנסים או מתבדרים:

א. $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}dx$.

ב. $\int_2^\infty \cos x dx$.

ג. $\int_1^\infty e^{-x}dx$.

ד. $\int_0^1 \ln x dx$.

ה. $\int_1^2 \frac{1}{x^2-1}dx$

שאלה 2
היעזר במבחן דריכלה וענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שלכל $p>0$ $\int_1^\infty \frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ מתכנס.

ב. הוכיחו שלכל p האינטגרל $\int_1^\infty \frac{(\ln x)^p \sin x}{x}dx$ מתכנס.

פתרון שאלה 2
סעיף א
$f(x)=e^{\sin x}\sin 2x$; $g(x)=\frac{1}{x^p}$.

לכל $p>0$ פונקציה $g(x)$ מונוטונית יורדת ו $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$.

נבדוק את התנאים של מבחן דיריכלה בשביל פונקציה $\boldsymbol{f(x)}$.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\int_a^b e^{\sin x}\sin 2x dx\right|=\left\{\begin{matrix}\text{הצבה}\\ \sin x=t\end{matrix}\right\}=2\left|\int_a^{\sin b} e^t t dt\right|\le 2\int_a^1 e^t t dt<2e=K$$

תנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ולכן אינטגרל מתכנס.

סעיף ב
$f(x)=\sin x$; $g(x)=\frac{(\ln x)^p}{x}$. נבדוק ש $g(x)$ מונוטונית יורדת. ו $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$.

$$g'(x)=\frac{(\ln x)^{p-1}}{x^2}(p-\ln x)$$

$g'(x)<0$ לכל $x>e^p$, לכן פונקציה $g(x)$ מונוטונית יורדת החל מ $x>e^p$.

$\lim_{x\to\infty} g(x)=0$ לפי כלל לופיטל.

שאלה 3
עבור האינטגרלים הלא אמיתיים הבאים, קבעו האם הם מתכנסים או מתבדרים:

א. $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^4}}dx$ ב. $\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$ ג. $\int_2^\infty \frac{x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2-x}}$

פתרון שאלה 3
סעיף א

נשים לב ש $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^4}}>0$ לכל $1\le x$ ואז ניתן להשתמש במבחן המנה.

$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ מתכנס.

$\frac{1}{\sqrt{5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot x\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^4}}:\frac{1}{x\sqrt{x}}$ ולכן גם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^4}}dx$ מתכנס.

<u>סעיף ב</u>

ברור ש $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$, ולכן

$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)>0$ החל מ x_0 מסוים. לכן מותר להשתמש במבחן ההשוואה

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\sim\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\sim\frac{1}{x}\quad(x\to\infty)$$

האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ מתבדר, לכן גם האינטגרל $\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$ מתבדר.

<u>סעיף ג</u>

$\int_2^\infty \frac{x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2-x}}$. תחילה נשים לב שלכל $2\le x$ מתקיים $0\le\frac{x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2-x}}$.

ניתן להשתמש במבחן המנה. נשים לב תחילה ש $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1 \Leftarrow \lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$.

$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ מתבדר. $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2-x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-x}}\cdot x\sin\frac{1}{x}=1$ והאינטגרל שלנו מתבדר.

<u>שאלה 4</u>

האם האינטגרל הלא אמיתי $\int_2^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}-1}dx$ מתכנסים בהחלט, מתכנסים בתנאי או מתבדרים?

<u>פתרון שאלה 4</u>

נסמן $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$. הפונקציה מונוטונית יורדת, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ ופונקציית הנגזרת רציפה בקטע $[2,\infty)$.

נסמן $g(x)=\sin x$.

$G(x)=\int_2^x \sin t\,dt=[\cos t]_2^x=\cos x-\cos 2$ מכיוון שלכל x ממשי מתקיים $-1\le \cos x\le 1$ אז $G(x)$ חסומה וכל תנאי משפט דריכלה מתקיימים כלומר האינטגרל $\int_2^\infty f(x)g(x)dx=\int_2^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}-1}dx$ מתכנס.

נשאר לבדוק האם $\int_2^\infty \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}-1}dx$ מתכנס או מתבדר.

מכיוון ש $\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}-1}\ge 0$ ניתן להשתמש במבחן ההשוואה הראשון.

נשים לב ש $\sin^2 x\le|\sin x|$ ואז $\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}-1}\le\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}-1}$. אם נוכיח ש $\int_2^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}-1}dx$ מתבדר אז גם $\int_2^\infty \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}-1}dx$ והתשובה תהייה $\int_2^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}-1}dx$ מתכנס בתנאי.

$\cos 2x=1-2\sin^2 x\Rightarrow \sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}$.

$\int_2^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}-1}dx=\frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{1-\cos 2x}{\sqrt{x}-1}dx=\frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}-1}dx-\frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}-1}dx$.

נבדוק האם $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}-1}dx$ מתכנס או מתבדר.

נשים לב ש $\frac{1}{\sqrt{x}-1}\ge 0$ לכל $2\le x$. ניתן להשתמש במבחן השוואה הראשון.

$\frac{1}{\sqrt{x}-1}\ge\frac{1}{\sqrt{x}}$ לכל $2\le x$ מכיוון ש $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ מתבדר גם $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}-1}dx$ מתבדר.

נבדוק האם $\int_2^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}-1}dx$ מתכנס או מתבדר.

נסמן $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$. הפונקציה מונוטונית יורדת, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ ופונקציית הנגזרת רציפה בקטע $[2,\infty)$.

נסמן $g(x)=\cos 2x$.

$G(x)=\int_2^x \cos 2t\,dt=[-0.5\sin 2t]_2^x=-0.5\sin 2x+0.5\sin 4$ מכיוון שלכל x ממשי מתקיים $-1\le\sin 2x\le 1$ אז $G(x)$ חסומה וכל תנאי משפט דריכלה מתקיימים כלומר האינטגרל $\int_2^\infty f(x)g(x)dx=\int_2^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}-1}dx$ מתכנס.

סה"כ קיבלנו ש $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}-1}dx$ מתבדר ו $\int_2^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}-1}dx$ ולכן $\int_2^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}-1}dx=\frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}-1}dx-\frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}-1}dx$ מתבדר והאינטגרל בתרגיל מתכנס בתנאי.