

## תרגול 9

### שאלה 1

בדוק בעזרת חישוב פונקציה קדומה האם האינטגרלים הבאים מתכנסים או מתבדרים:

א.  $\int_0^1 \ln x dx$

ב.  $\int_1^2 \frac{1}{x^2-1} dx$

ג.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$

### שאלה 2

עבור האינטגרלים הלא אמיתיים הבאים, קבעו האם הם מתכנסים או מתבדרים:

א.  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2} dx$

ב.  $\int_0^1 \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$

## פתרון שאלה 2

### סעיף א

נבדוק התכנסות האינטגרל  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ . מספיק לבדוק האם האינטגרל  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\ln x}{1-x^2} dx$  מתכנס.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} -\ln x dx = [-x \ln x + x]_0^{\frac{1}{2}} = \lim_{a \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + b \ln b - b \right] = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

ז"א האינטגרל  $\int_0^{\frac{1}{2}} -\ln x dx$  מתכנס.

לכל  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  וניתן להשתמש במבחן ההשוואה הראשון.

לכל  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  מתקיים  $\frac{-\ln x}{1-x^2} \leq \frac{-4 \ln x}{3}$ . מכיון ש  $\int_0^{\frac{1}{2}} -\ln x dx$  מתכנס גם  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-4 \ln x}{3} dx$

ממבחן ההשוואה הראשון נקבל ש  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\ln x}{1-x^2} dx$  מתכנס.

### סעיף ב

נבדוק האם  $\int_0^1 \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$  מתכנס.

בקטע  $0 \leq x \leq 1$  נקבל ש  $\frac{\pi}{4} \leq \arctan \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2}$  ואז  $\frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} > 0$  לכל  $0 \leq x \leq 1$  וניתן להשתמש

במבחן ההשוואה הראשון.

לכל  $0 \leq x \leq 1$  מתכנס.  $\int_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{x}} dx$  ז"א גם  $\int_0^1 \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$  מתכנס.